Úlohy 1. kola 54. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie A*

1. Momenty setrvačnosti

Homogenní deska tvaru trojúhelníku o stranách a, b, c a o hmotnosti m má vzhledem k ose procházející těžištěm kolmo k rovině desky moment setrvačnosti

$$J_0 = \frac{1}{36} m(a^2 + b^2 + c^2). \tag{1}$$

a) Odvoďte vzorec pro moment setrvačnosti homogenní desky tvaru pravidelného šestiúhelníku o straně délky a a o hmotnosti m vzhledem k ose procházející těžištěm.

b) Odvoďte vzorec pro moment setrvačnosti homogenní desky tvaru čtverce o straně délky a a o hmotnosti m vzhledem k ose procházející těžištěm.

c) Odvoďte vzorec pro moment setrvačnosti homogenní desky tvaru pravidelného n-úhelníku o poloměru r kružnice opsané a o hmotnosti m vzhledem k ose procházející těžištěm.

d) Ověřte výsledky úloh a), b) užitím výsledku úlohy c).

e) Pomocí výsledku úlohy c) odvoďte vzorec pro moment setrvačnosti homogenní desky tvaru kruhu o poloměru r a o hmotnosti m vzhledem k ose procházející těžištěm.

K řešení využijte *Steinerovu větu*. Všechny momenty setrvačnosti odvoďte vzhledem k ose kolmé k rovině desky.

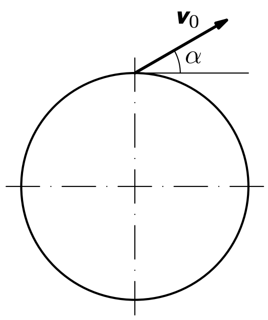
2. Vrh šikmo vzhůru v radiálním gravitačním poli Země

Střela je vystřelena šikmo vzhůru z povrchu Země pod úhlem α vzhledem k tečné rovině povrchu (obr. 1) počáteční rychlostí $\boldsymbol{v}_0$, jejíž velikost je rovna polovině velikosti 1. kosmické rychlosti. Určete

a) největší výšku nad povrchem Země, které střela dosáhne.

b) velikost rychlosti střely v okamžiku, kdy dosáhne maximální výšku.

c) Jak by se změnily výsledky úloh a) a b), pokud by těleso bylo vrženo šikmo vzhůru pod stejným úhlem první kosmickou rychlostí?



Obr. 1

Při řešení části a) a b) počítejte se zakřivením povrchu Země (Zemi považujte za kouli). Vliv atmosféry a rotaci Země zanedbejte. Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $\alpha = 30°$, $R_Z = 6\,400$ km.

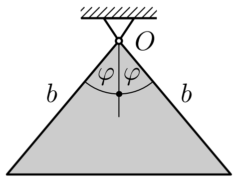
3. Trojúhelníkové kyvadlo

Homogenní desku tvaru rovnoramenného trojúhelníku s ramenem b a úhlem u hlavního vrcholu 2φ připevníme hlavním vrcholem k vodorovné ose otáčení kolmé k rovině desky, čímž získáme kyvadlo (obr. 2).

a) Určete periodu jeho kmitů s malou amplitudou výchylky.

b) Určete, jakou velikost musí mít úhel φ, aby doba kyvu byla 1,00 s.

Úlohu a) řešte obecně, úlohu b) číselně pro $b = 1{,}20$ m.



Obr. 2

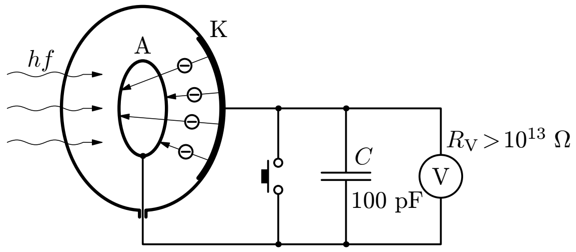
Pro stanovení momentu setrvačnosti desky můžete použít vzorec (1) uvedený v první úloze. Počítejte s tíhovým zrychlením $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

4. Měření Planckovy konstanty

Osvětlíme-li katodu vakuové fotonky zapojenou podle obr. 3 monochromatickým světlem o frekvenci vyšší, než je mezní frekvence f_0, zachycují se některé elektrony vyražené z katody na anodě, která se nabíjí záporně. Obvodem prochází nepatrný proud a napětí na fotonce a připojeném kondenzátoru s kvalitním dielektrikem se zvyšuje, až dosáhne brzdného napětí U_0, kdy ani kinetická energie nejrychlejších vyražených elektronů nepostačí k překonání energetického rozdílu $U_0 e$. Napětí měříme voltmetrem s velkým vstupním odporem.

Fotonka byla postupně osvětlena paprsky spektra rtuťové výbojky o různých vlnových délkách. Změřené hodnoty brzdného napětí jsou zapsány v tabulce:

λ/nm	576,0	546,1	491,6	435,8	404,7
U_0/V	0,405	0,530	0,750	1,120	1,310



Obr. 3

a) Ověřte, že závislost brzdného napětí na frekvenci světla je lineární v souladu s Einsteinovou rovnicí pro fotoelektrický jev. Vypočítané hodnoty frekvencí a změřené hodnoty brzdného napětí vyneste do grafu v Excelu a získanými body proložte přímku. Její rovnici určete lineární regresí.[1]

[1] Použití lineární regrese je podrobně vysvětleno na podobné úloze ve studijním textu Teplotní závislosti fyzikálních veličin na str. 28 až 31. Text se nachází na webových stránkách FO.

b) Z rovnice určete mezní vlnovou délku λ_0, výstupní práci elektronu W_0 a Planckovu konstantu h. včetně chyby měření.

c) Je možné fotonku použít v infračerveném oboru záření?

5. Digitální fotoaparát *(ke studijnímu textu)*

Obraz vytvořený objektivem digitální zrcadlovky je zachycen obdélníkovým snímacím čipem CMOS o rozměrech $a = 23{,}7$ mm, $b = 15{,}6$ mm, na kterém se nachází $16{,}2 \cdot 10^6$ citlivých bodů, pixelů, tvořících čtvercovou síť. Na objektivu zrcadlovky je vyznačeno, že optickým zoomem můžeme ohniskovou vzdálenost měnit od $f_1 = 18$ mm do $f_2 = 105$ mm. Světelnost objektivu se přitom mění od 1 : 1,35 do 1 : 5,6. Zjednodušeně si můžeme objektiv představit jako tenkou spojku a světelnost pak chápat jako poměr průměru D otvoru, do kterého je vsazena, k ohniskové vzdálenosti f.

Při průchodu světla objektivem dochází k Fraunhoferovu ohybu na kruhovém otvoru, v jehož důsledku se bodový zdroj monofrekvenčního světla nezobrazí ani při přesném zaostření úplně ostře, ale jako světlý kroužek.

a) Určete vzdálenost středů sousedních pixelů.

b) Určete poloměr světlého kroužku, který vznikne na čipu zobrazením vzdáleného bodového zdroje zeleného světla o vlnové délce 550 nm nezacloněným objektivem 1) při volbě ohniskové vzdálenosti f_1, 2) při volbě ohniskové vzdálenosti f_2. Velikost kroužku porovnejte s rozměry pixelu.

c) Posuďte, co může velikost interferenčního kroužku ovlivnit.

6. *Praktická úloha:* **Měření indukčnosti cívky**

Úkoly:

a) Sestavte obvod podle obr. 4. Použijte zdroje o napětí přibližně 5 V (například plochou baterii), cívku 1200 závitů z rozkladného transformátoru, výkonovou diodu, stejnosměrný ampérmetr, stejnosměrný voltmetr, kvalitní kondenzátor o kapacitě alespoň 8 μF (ne elektrolytický) a páčkový spínač. Měření proveďte:

- na cívce s uzavřeným jádrem,
- na cívce s rovným jádrem,
- na cívce bez jádra.

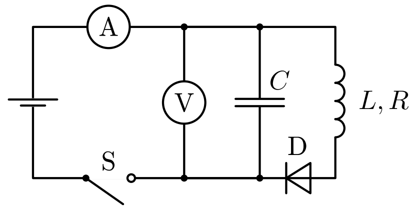
Kapacitu kondenzátoru změřte některou běžnou metodou (např. pomocí voltmetru a ampérmetru v obvodu střídavého proudu). Voltmetr by měl mít co největší odpor a rozsahy, např. 20 V a 200 V.

b) Při sepnutém spínači změřte proud I procházející cívkou a napětí U_1 na kondenzátoru. Pak přepněte voltmetr na vyšší rozsah (používáte-li ručkový přístroj, změňte také jeho polaritu) a rozepněte spínač. Dojde k překmitnutí

obvodu LC a na kondenzátoru se objeví velké napětí opačné polarity, které se bude zvolna zmenšovat v důsledku vybíjení kondenzátoru přes voltmetr. Změřte napětí U_2 bezprostředně po rozepnutí spínače.
Pro každý typ cívky měření několikrát zopakujte .

c) Odvoďte vztah pro výpočet indukčnosti cívky z kapacity C kondenzátoru, napětí U_1, U_2 a proudu I. Ztráty energie během překmitnutí na odporu cívky a na diodě zanedbejte.

d) Vypočtěte indukčnosti cívky s uzavřeným jádrem, s rovným jádrem a bez jádra.



Obr. 4

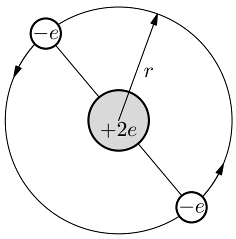
7. Rutherfordův model atomu helia *(ke studijnímu textu)*

V Rutherfordově modelu je atom hélia tvořen jádrem, složeným ze dvou protonů a dvou neutronů, a dvěma elektrony kroužícími kolem jádra po společné kružnici ve vzájemné vzdálenosti $2r$ (obr. 5). Ionizační práce potřebná k odtržení jednoho elektronu z atomu je $W_1 = 24{,}6$ eV, ionizační práce potřebná poté k úplné ionizaci je $W_2 = 54{,}4$ eV.

a) Určete velikost F výsledné síly působící na každý z elektronů, poloměr r trajektorie elektronů a frekvenci f, se kterou obíhají kolem jádra.

b) Podle zákonů klasické elektrodynamiky by měl Rutherfordův model vyzařovat elektromagnetické vlnění o stejné frekvenci, s jakou obíhají elektrony kolem jádra. Určete jeho vlnovou délku ve vakuu λ.

c) Po odtržení jednoho elektronu vznikne tzv. vodíkupodobný ion, jehož elektron v Rutherfordově modelu rovněž obíhá po kružnici. Určete její poloměr r'.



Obr. 5