Řešení úloh krajského kola 53. ročníku fyzikální olympiády.

Kategorie D

Autoři úloh: P. Šedivý 1, J. Jírů 2, 3, 4

1. a) Pohyb po nakloněné rovině je rovnoměrně zrychlený, pohyb po vodorovné rovině je rovnoměrný. Platí

$$l_1 = \frac{vt_1}{2}, \qquad l_2 = vt_2.$$

Řešením soustavy rovnic

$$t_1 + t_2 = t, \qquad \frac{t_1}{t_2} = \frac{\frac{2l_1}{v}}{\frac{l_2}{v}} = \frac{2l_1}{l_2}$$

dostaneme

$$t_1 = \frac{2l_1}{2l_1 + l_2} t = 2{,}0 \text{ s}, \qquad t_2 = \frac{l_2}{2l_1 + l_2} t = 1{,}5 \text{ s}.$$

3 body

b) Celková doba pohybu je

$$t = t_1 + t_2 = \frac{2l_1}{v} + \frac{l_2}{v}.$$

Z toho

$$v = \frac{2l_1 + l_2}{t} = 2{,}0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

3 body

c) Potenciální energie kuličky při startu je rovna kinetické energii valivého pohybu na konci nakloněné roviny a na vodorovné rovině:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}mr^2 \cdot \left(\frac{v}{r}\right)^2 = \frac{7}{10}mv^2.$$

Z toho

$$h = \frac{7}{10} \cdot \frac{v^2}{g} = \frac{7(2l_1 + l_2)^2}{10gt^2} \doteq 0{,}29 \text{ m}.$$

4 body

2. a) Ze zákona zachování hybnosti

$$(m_1 + m_2)v = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

plyne

$$v_2 = \frac{(m_1 + m_2)v - m_1 v_1}{m_2} = 4{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

3 body

b) Práce je rovna rozdílu kinetických energií po působení síly a před jejím působením:

$$W = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = 48\ \mathrm{J}.$$

3 body

c) Velikost zrychlení partnera je

$$a_1 = \frac{v - v_1}{\Delta t} = 0{,}88\ \mathrm{m \cdot s^{-2}},$$

velikost zrychlení partnerky

$$a_2 = \frac{v_2 - v}{\Delta t} = 1{,}25\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$

Velikost působící síly určíme jako akci partnera nebo jako reakci partnerky pomocí druhého Newtonova pohybového zákona

$$F = m_1 a_1 = m_2 a_2 = 70\ \mathrm{N}.$$

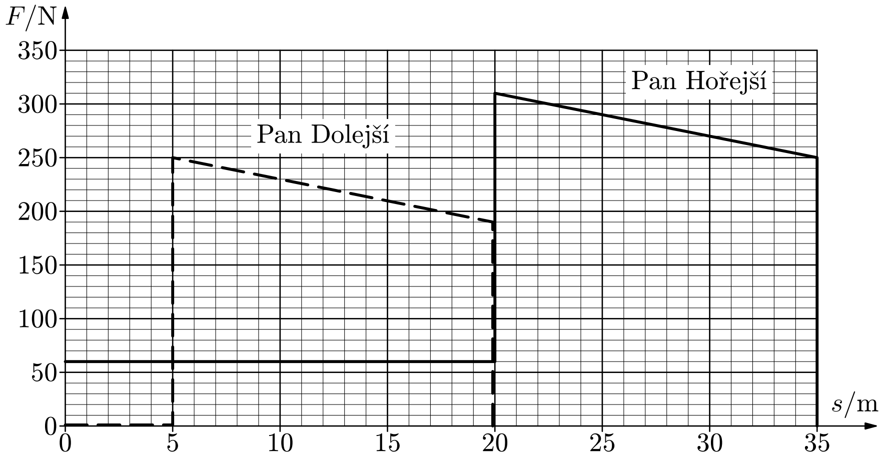
4 body

Poznámka:

V případě, že student vyřeší úlohu b) obecně (což se v zadání nepožaduje), vyjde

$$W = \frac{m_1(m_1 + m_2)(v - v_1)^2}{2m_2}.$$

3. a) Grafy závislostí sil na dráze:



6 bodů

b) Práci lze určit z grafu jako obsah plochy pod grafem. Pan Hořejší vykonal práci

$$W_{\mathrm{H}} = \left(60 \cdot 20 + 250 \cdot 15 + \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 15\right)\ \mathrm{J} = 5\,400\ \mathrm{J}.$$

Pan Dolejší vykonal práci

$$W_{\mathrm{D}} = \left(190 \cdot 15 + \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 15\right)\ \mathrm{J} = 3\,300\ \mathrm{J}.$$

Jiná možnost určení práce:
Hmotnost celého lana je 14 kg, hmotnost lana délky 15 m je 6 kg. Pan Hořejší musí vytáhnout celé lano, přičemž visící část lana délky 15 m má již počáteční potenciální energii $E_0 = mgh = 6 \cdot 10 \cdot 7{,}5\ \mathrm{J} = 450\ \mathrm{J}$ (těžiště visící části je v poloviční výšce plošiny). Potenciální energie celého lana na plošině vzhledem k zemi je $E_1 = 14 \cdot 10 \cdot 15\ \mathrm{J} = 2\,100\ \mathrm{J}$, potenciální energie břemene $E_{\mathrm{b}} = 25 \cdot 10 \cdot 15\ \mathrm{J} = 3\,750\ \mathrm{J}$.
Práce, kterou vykonal pan Hořejší je

$$W_{\mathrm{H}} = E_{\mathrm{b}} + E_1 - E_0 = 5\,400\ \mathrm{J}.$$

Pan Dolejší vytáhl břemeno vykonáním práce 3 750 J a spotřeboval práci 450 J tím, že o tuto hodnotu během druhé fáze vytahování zmenšil potenciální energii lana. Vykonal tedy práci

$$W_{\mathrm{D}} = E_{\mathrm{b}} - E_0 = 3\,300\ \mathrm{J}.$$

4 body

4. a) Označme v_1 velikost obvodové rychlosti na konci první otočky, a_2 velikost tečného zrychlení během třetí otočky.
Pro první otočku platí:

$$2\pi r = \frac{1}{2}a_1 t_1^2, \tag{1}$$

$$v_1 = a_1 t_1.$$

Z rovnic plyne

$$2\pi r = \frac{1}{2}v_1 t_1. \tag{2}$$

Pro druhou otočku platí

$$2\pi r = v_1 t_2. \tag{3}$$

Z rovnic (2) a (3) dostaneme $t_2 = \dfrac{t_1}{2} = 4{,}5\ \mathrm{s}$.

2 body

b) Z rovnice (1) dostaneme $a_1 = \dfrac{4\pi r}{t_1^2} = 0{,}33\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

2 body

c) Z rovnice (2) plyne $v_1 = \dfrac{4\pi r}{t_1}$. Dosazením do vzorce $a_\mathrm{d} = \dfrac{v_1^2}{r}$ dostaneme $a_\mathrm{d} = \dfrac{16\pi^2 r}{t_1^2} = 4{,}1\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

2 body

d) Hledanou velikost rychlosti určíme ze vztahu $v_2 = v_1 + a_2 t_3$, do něhož potřebujeme pro třetí otočku velikost počáteční rychlosti v_1 a velikost tečného zrychlení a_2.
Pro velikost počáteční rychlosti užitím výsledku úlohy b) dostaneme

$$v_1 = a_1 t_1 = \frac{4\pi r}{t_1}.$$

Dále pro třetí otočku platí $2\pi r = v_1 t_3 + \dfrac{1}{2}a_2 t_3^2$.

Z rovnice plyne $a_2 = 2\cdot\dfrac{2\pi r - v_1 t_3}{t_3^2}$.

Po dosazení a úpravě dostaneme $v_2 = 4\pi r\dfrac{t_1 - t_3}{t_1 t_3} = 3{,}7\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

4 body