Řešení úloh krajského kola 53. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie C

Autoři úloh: J. Thomas (1, 2, 3) a M. Jarešová (4)

1. a) Puk se pohybuje rovnoměrně zpomaleně se stálým zrychlením o velikosti a. Velikost počáteční rychlosti puku označíme v_0.

Na prvním úseku platí

$$v_1 = v_0 - at, \qquad (1)$$

$$l = \frac{v_0 + v_1}{2} t. \qquad (2)$$

Na druhém úseku platí

$$v_2 = v_1 - a \cdot 1{,}5t, \qquad (3)$$

$$l = \frac{v_1 + v_2}{2} 1{,}5t. \qquad (4)$$

3 body

Z rovnic (1) a (3)

$$a = \frac{v_0 - v_1}{t} = \frac{v_1 - v_2}{1{,}5t} \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{5v_1 - 2v_2}{3}.$$

Dosazením do rovnice (2)

$$l = \frac{1}{2}\left(\frac{5v_1 - 2v_2}{3} + v_1\right) t \quad \Rightarrow \quad v_2 = 4v_1 - \frac{3l}{t}. \qquad (5)$$

Dosazením do rovnice (4)

$$l = \frac{1}{2}\left(5v_1 - \frac{3l}{t}\right) 1{,}5t \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{13l}{15t}.$$

Dosazením do rovnice (5)

$$v_2 = \frac{7l}{15t}. \qquad (6)$$

Pro dané hodnoty $v_1 = 5{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $v_2 = 3{,}1\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

4 body

b) Dobu pohybu puku na 3. úseku určíme s užitím vztahů (3), (5) a (6):

$$t_3 = \frac{v_2}{a} = \frac{v_2}{v_1 - v_2} 1{,}5t = \frac{\frac{7l}{15t}}{\frac{13l}{15t} - \frac{7l}{15t}} 1{,}5t = \frac{7}{4} t.$$

Délka třetího úseku je

$$s = \frac{1}{2} v_2 t_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{7l}{15t} \cdot \frac{7t}{4} = \frac{49l}{120}.$$

pro dané hodnoty $t_3 = 5{,}25$ s, $s = 8{,}2$ m.

3 body

2. a) Úlohu budeme řešit ve vztažné soustavě spojené s pohybujícími se spojenými nádobami. Na částici kapaliny o hmotnosti m působí tíhová síla $\boldsymbol{F}_G = m\boldsymbol{g}$ a setrvačná síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{s} = -m\boldsymbol{a}$. Rovina hladin v trubicích zaujme polohu kolmou k výslednici těchto sil a pro její sklon α platí

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_\mathrm{s}}{F_G} = \frac{a}{g}.$$

3 body

Část vody vyteče z levé trubice, v ostatních trubicích dojde k poklesu hladiny vody (obr. R1). Označme h hloubku, do které klesne hladina v druhé trubici. Ve třetí trubici klesne hladina do hloubky $2h$ a ve čtvrté do hloubky $3h$. Protože vytekly 3/20 celkového objemu, platí

$$\frac{6h}{5L} = \frac{3}{20} \qquad \Rightarrow \qquad h = \frac{1}{8}L.$$

Hladina ve druhé trubici byla tedy ve výšce $\frac{7}{8}L$, ve třetí trubici ve výšce $\frac{3}{4}L$ a ve čtvrté trubici ve výšce $\frac{5}{8}L$.

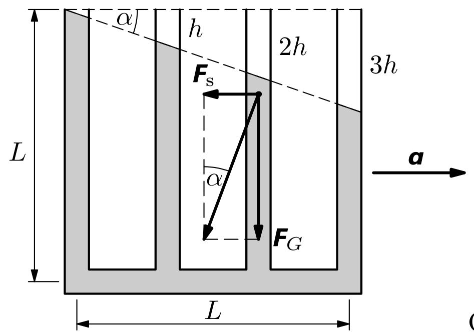
2 body

Z rovnosti $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{g} = \frac{3h}{L} = \frac{3}{8}$ plyne $a = \frac{3}{8}g$.

2 body

b) Při druhém pokusu platí $3h = \frac{L}{4}$. Pak $a = \frac{3h}{L}g = \frac{g}{4}$. Ze spojených nádob vyteklo $\frac{6h}{5L} = \frac{1}{10}$ celkového objemu.

3 body



Obr. R1

3. Pro souřadnice polohového vektoru a vektoru okamžité rychlosti platí kinematické zákony

$$x = v_0 t \cos\alpha, \qquad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2, \tag{1}$$

$$v_x = v_0 \cos\alpha, \qquad v_y = v_0 \sin\alpha - gt. \tag{2}$$

Vyloučením času z (1) dostaneme neparametrickou rovnici trajektorie

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha}. \tag{3}$$

a) V hledaných bodech má platit

$$mgy = \frac{1}{2} m v^2. \tag{4}$$

Ze zákona zachování mechanické energie plyne

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v^2 + mgy = 2mgy \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{v_0^2}{4g}.$$

Dosazením do (3) dostaneme kvadratickou rovnici

$$\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 - x \operatorname{tg}\alpha + \frac{v_0^2}{4g} = 0$$

s kořeny

$$x_{1,2} = \frac{v_0^2 \cos^2\alpha}{g} \left(\operatorname{tg}\alpha \pm \sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha - \frac{1}{2\cos^2\alpha}} \right).$$

Rovnice má řešení, když

$$\operatorname{tg}^2\alpha - \frac{1}{2\cos^2\alpha} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \alpha \geq 45°,$$

což je pro dané hodnoty splněno.
Číselně vychází $x_1 = 4{,}2$ m, $x_2 = 15{,}7$ m, $y = 5{,}7$ m.

5 bodů

b) Z (4) a ze zákona zachování mechanické energie pro hledané body dále plyne

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v^2 + mgy = m v^2 \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{v_0}{\sqrt{2}}.$$

Pro odchylku β okamžité rychlosti od vodorovného směru platí

$$\cos\beta = \frac{v_x}{v} = \frac{v_0 \cos\alpha}{\frac{v_0}{\sqrt{2}}} = \cos\alpha \cdot \sqrt{2}.$$

Pro dané hodnoty vychází $v = 10{,}6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $\cos\beta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
V bodě $[x_1, y]$ na vzestupné části trajektorie $\beta = 45°$, v bodě $[x_2, y]$ na sestupné části trajektorie $\beta = -45°$.

5 bodů

4. a) Použijeme stavovou rovnici ideálního plynu ve tvaru

$$pV = \frac{m}{M_\mathrm{m}} RT_1,$$

z níž vyjádříme

$$T_1 = \frac{M_\mathrm{m} pV}{mR}.$$

Po dosazení dostaneme

$$T_1 = \frac{32 \cdot 10^{-3} \cdot 15 \cdot 10^6 \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{4{,}23 \cdot 8{,}31}\ \mathrm{K} = 273\ \mathrm{K},$$

a tedy $t_1 = 0\ {}^\circ\mathrm{C}$.

3 body

b) Do van der Waalsovy rovnice pro n molů dosadíme za $n = \dfrac{m}{M_\mathrm{m}}$. Dostaneme

$$\left(p + \frac{m^2}{M_\mathrm{m}^2}\frac{a}{V^2}\right)\left(V - \frac{m}{M_\mathrm{m}}b\right) = nRT_2,$$

z čehož

$$T_2 = \frac{\left(p + \dfrac{m^2}{M_\mathrm{m}^2}\dfrac{a}{V^2}\right)\left(V - \dfrac{m}{M_\mathrm{m}}b\right)}{\dfrac{m}{M_\mathrm{m}}R}.$$

Po dosazení dostaneme

$$T_2 = \frac{\left(15\cdot 10^6 + \dfrac{4{,}23^2}{(32\cdot 10^{-3})^2}\dfrac{0{,}138}{(20\cdot 10^{-3})^2}\right)\left(20\cdot 10^{-3} - \dfrac{4{,}23 \cdot 32\cdot 10^{-6}}{32\cdot 10^{-3}}\right)}{\dfrac{4{,}23}{32\cdot 10^{-3}} \cdot 8{,}31}\ \mathrm{K},$$

tedy $T_2 = 302\ \mathrm{K}$, potom $t_2 = 29\ {}^\circ\mathrm{C}$.

5 bodů

c) Kritická teplota kyslíku v bombě je

$$T_\mathrm{k} = \frac{8}{27}\frac{a}{Rb} = \frac{8}{27}\frac{0{,}138}{8{,}31 \cdot 32 \cdot 10^{-6}}\ \mathrm{K} = 154\ \mathrm{K},$$

pak $t_\mathrm{k} = -119\ {}^\circ\mathrm{C}$.
Vzhledem k tomu, že $t_2 > t_\mathrm{k}$, nachází se kyslík v bombě v plynném stavu.

2 body