Řešení úloh krajského kola 53. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie B

Autoři úloh: M. Jarešová (2, 4) a J. Thomas (1, 3)

1. a) Zvolme souřadnicovou soustavu s počátkem v místě výstřelu. V čase t_0 bude granát v místě o souřadnicích

$$x_0 = v_0 t_0 \cos\alpha = 1\,300 \text{ m}, \qquad y_0 = v_0 t_0 \sin\alpha - \frac{1}{2} g t_0^2 = 260 \text{ m}.$$

2 body

b) Velikost rychlosti granátu před rozpadem a její odchylku β od vodorovného směru určíme ze vztahů:

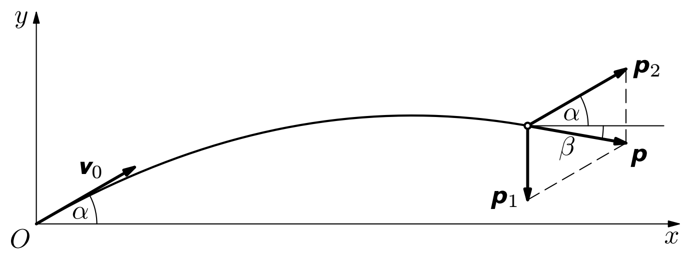
$$v = \sqrt{(v_0\cos\alpha)^2 + (v_0 \sin\alpha - g t_0)^2} = 132 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{v_0 \sin\alpha - g t_0}{v_0 \cos\alpha} = -10°.$$

Rychlosti obou částí granátu po rozpadu určíme pomocí zákona zachování hybnosti (obr. R1):

$$p_2 \cos\alpha = p\cos\beta, \quad p_1 = p_2 \sin\alpha + p \sin|\beta|.$$

Úpravou dostaneme $p_2 = \dfrac{p\cos\beta}{\cos\alpha}, \quad p_1 = p(\operatorname{tg}\alpha\cos\beta + \sin|\beta|).$



Obr. R1

Protože zlomky mají poloviční hmotnost než celý granát, platí

$$v_1 = 2v(\operatorname{tg}\alpha\cos\beta + \sin|\beta|) = 196 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad v_2 = \frac{2v\cos\beta}{\cos\alpha} = 300 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

3 body

c) První zlomek se pohybuje svisle dolů z výšky y_0 a na zem dopadne za dobu t_1 od rozpadu granátu, pro kterou platí: $y_0 - v_1 t_1 - \dfrac{1}{2} g t_1^2 = 0$. Úloze vyhovuje kladný kořen

$$t_1 = \frac{-\,v_1 + \sqrt{v_1^2 + 2 g y_0}}{g} = 1{,}3 \text{ s}.$$

První zlomek tedy dopadne za dobu $t_0 + t_1 = 11{,}3$ s od okamžiku výstřelu.

Druhý zlomek se pohybuje šikmo vzhůru a dopadne na zem za dobu t_2 od rozpadu granátu, pro kterou platí: $y_0 + v_2 t_2 \sin\alpha - \frac{1}{2} g t_2^2 = 0$. Úloze opět vyhovuje kladný kořen

$$t_2 = \frac{v_2 \sin\alpha + \sqrt{v_2^2 \sin^2\alpha + 2gy_0}}{g} = 32\ \mathrm{s}.$$

Druhý zlomek tedy dopadne na zem za dobu

$$t_0 + t_2 = 42\ \mathrm{s}.$$

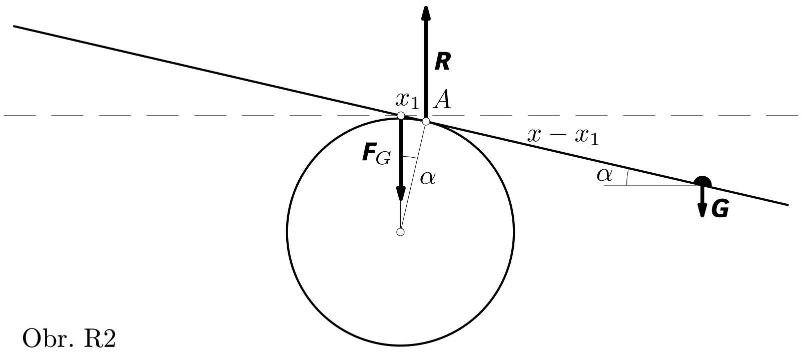
3 body

d) První zlomek granátu dopadne ve vzdálenosti $x_0 = 1\,300$ m od místa výstřelu. Pro vzdálenost místa dopadu 2. zlomku od místa výstřelu platí:

$$x_2 = x_0 + v_2 t_2 \cos\alpha = 9\,700\ \mathrm{m}.$$

2 body

2. a) Na lať působí v jejím těžišti tíhová síla o velikosti $F_G = Mg$, dále pak působí na lať tíha myši o velikosti $G = mg = 0{,}1Mg$. Třetí síla, která na lať působí, je reakce válce $\boldsymbol{R}$.



Obr. R2

Momenty sil $\boldsymbol{F}_G$, $\boldsymbol{G}$ vzhledem k bodu A, ve kterém se lať dotýká válce, musí být také v rovnováze. Z toho plyne

$$F_G x_1 \cos\alpha = G(x - x_1)\cos\alpha,$$

kde α je odchylka latě od vodorovného směru a x_1 je posunutí bodu A při odvalování. Po dosazení dostaneme

$$Mgx_1 \cos\alpha = mg(x - x_1)\cos\alpha,$$

z čehož $x_1 = \dfrac{m}{m+M}x = \dfrac{x}{11}$. Dále platí $\alpha = \dfrac{x_1}{r} = \dfrac{x}{11r}$. **4 body**

b) Lať se odchýlí o maximální úhel, když se myš dostane až na její konec (obr. R3). Myš musí urazit dráhu $\dfrac{l}{2} = 3{,}5r$. Tomu odpovídá úhel

$$\alpha_\mathrm{m} = \frac{3,5}{11}\ \mathrm{rad} \doteq 18^\circ .$$

Dolní konec latě se přitom bude nacházet ve výšce

$$h = r + r\cos\alpha_\mathrm{m} + \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{2}\cdot\frac{m}{m+M}\right)\sin\alpha_\mathrm{m} =$$

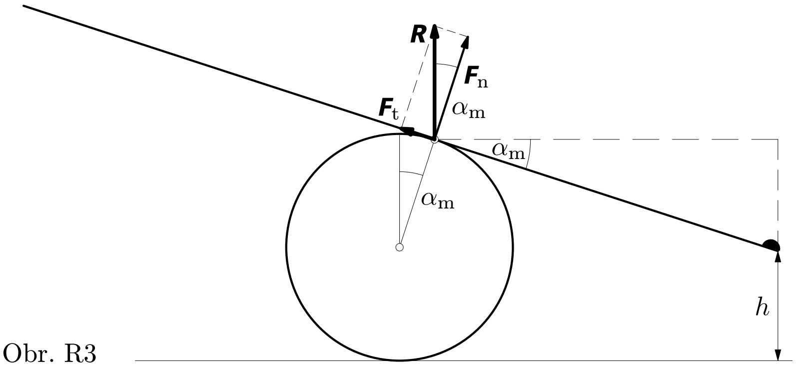
$$= r(1 + \cos\alpha_\mathrm{m} - 3{,}5r \cdot \frac{10}{11}\sin\alpha_\mathrm{m}) \doteq 0{,}95r.$$

3 body

c) Aby lať nesklouzla s povrchu válce, musí být splněna podmínka (dle obr. R3)

$$F_\mathrm{t} = R\sin\alpha_\mathrm{m} \leq fF_\mathrm{n} = fR\cos\alpha_\mathrm{m}, \quad \text{z čehož} \quad f \geq \operatorname{tg}\alpha_\mathrm{m}.$$

Po dosazení za $\alpha_\mathrm{m} = 18^\circ$ dostaneme $f \geq 0{,}33$. **3 body**



Obr. R3

3.a) Dobu kmitu fyzického kyvadla určíme obecně ze vztahu $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}}$, kde J je moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose otáčení a $D = mgd$ je direkční moment, kde d je vzdálenost těžiště od osy otáčení a m hmotnost kmitající soustavy. Podle Steinerovy věty $J = MR^2 + MR^2 = 2MR^2$. Těžiště roury je v jejím středu, takže $D = MgR$. Pak

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2MR^2}{MgR}} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}} = 1{,}55\ \mathrm{s}.$$

3 body

b) Moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení $J = 2MR^2 + 0{,}20M(2R)^2 = 2,8MR^2$. Protože $M/m_1 = 5$, je těžiště soustavy ve vzdálenosti $d = 7R/6$ od osy otáčení. Pak

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2{,}8MR^2}{\frac{6}{5}Mg\frac{7}{6}R}} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}} = 1{,}55\ \mathrm{s}.$$

3 body

c) K řešení využijeme zákon zachování energie: Při vychýlení roury o úhel α_m získá roura s tělískem potenciální energii tíhovou

$$E_\mathrm{p} = m_1gR(1-\cos\alpha_\mathrm{m}) \approx m_1gR\frac{\alpha_\mathrm{m}^2}{2} = m_1g\frac{x_\mathrm{m}^2}{2R},$$

kde $x_\mathrm{m} = R\alpha_\mathrm{m}$ je vzdálenost, o kterou se posunul střed roury při maximální výchylce proti rovnovážné poloze. Při průchodu rovnovážnou polohou se střed roury pohybuje rychlostí $v_\mathrm{m} = \omega x_\mathrm{m} = \frac{2\pi}{T}x_\mathrm{m}$ a soustava získá kinetickou energii $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}J\Omega_\mathrm{m}^2$, kde J je moment setrvačnosti roury vzhledem k okamžité ose otáčení (bodu dotyku roury s podložkou) a Ω_m je maximální úhlová rychlost, jakou se otáčí roura s tělískem kolem této osy. Platí $\Omega_\mathrm{m} = \frac{v_\mathrm{m}}{R} = \frac{2\pi x_\mathrm{m}}{TR}$, kde v_m je rychlost, jakou se pohybuje střed roury při jejím průchodu rovnovážnou polohou. Pak tedy platí:

$$\frac{1}{2}J\Omega_\mathrm{m}^2 = \frac{1}{2}2M\frac{4\pi^2}{T^2}x_\mathrm{m}^2 = m_1g\frac{x_\mathrm{m}^2}{2R} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{2MR}{m_1g}} = 2\pi\sqrt{\frac{10R}{g}} = 3{,}47\ \mathrm{s}.$$

4 body

4. a) Je-li S_2 rozpojen a S_1 sepnut, platí

$$\frac{1}{C_{12}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C} = \frac{2}{C},$$

z čehož $C_{12} = \dfrac{C}{2}$,
obdobně platí také

$$\frac{1}{C_{34}} = \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} = \frac{1}{C} + \frac{1}{2C} = \frac{3}{2C},$$

z čehož $C_{34} = \dfrac{2}{3}C$.
Celková kapacita soustavy

$$C_\mathrm{a} = C_{12} + C_{34} = \frac{C}{2} + \frac{2}{3}C = \frac{7}{6}C.$$

Celková energie soustavy je $E_\mathrm{a} = \dfrac{1}{2}C_\mathrm{a}U^2 = \dfrac{7}{12}CU^2$ a celkový náboj dodaný zdrojem při nabíjení je $Q_\mathrm{a} = \dfrac{7}{6}CU$. Náboje na jednotlivých kondenzátorech jsou $Q_1 = Q_2 = C_{12}U = \dfrac{1}{2}CU$, $Q_3 = Q_4 = C_{34}U = \dfrac{2}{3}CU$. Napětí na jednotlivých kondenzátorech pak jsou $U_1 = U_2 = \dfrac{1}{2}U$, $U_3 = \dfrac{Q_3}{C} = \dfrac{2}{3}U$, $U_4 = \dfrac{Q_4}{2C} = \dfrac{1}{3}U$. **3 body**

b) Po sepnutí spínače S_2 se změní kapacita soustavy (C_1 a C_3 jsou spojeny paralelně, k tomu je sériově připojena paralelní kombinace C_3 a C_4). Platí $C_{13} = C_1 + C_3 = 2C$, $C_{24} = C_2 + C_4 = C + 2C = 3C$,

$$\frac{1}{C_\mathrm{b}} = \frac{1}{C_{13}} + \frac{1}{C_{24}} = \frac{1}{2C} + \frac{1}{3C},$$

z čehož $C_\mathrm{b} = \dfrac{6}{5}C$. Celková energie soustavy pak bude

$$E_\mathrm{b} = \frac{1}{2}C_\mathrm{b}U^2 = \frac{3}{5}CU^2.$$

Celkový náboj pak bude $Q_\mathrm{b} = C_\mathrm{b}U = \dfrac{6}{5}CU$. Napětí na jednotlivých kondenzátorech jsou $U_1 = U_3 = \dfrac{Q_\mathrm{b}}{C_{13}} = \dfrac{3}{5}U$, $U_2 = U_4 = \dfrac{Q_\mathrm{b}}{C_{24}} = \dfrac{2}{5}U$. Nakonec určíme náboje na jednotlivých kondenzátorech: $Q_1 = C_1U_1 = \dfrac{3}{5}CU$, $Q_2 = C_2U_2 = \dfrac{2}{5}CU$, $Q_3 = C_3U_3 = \dfrac{3}{5}CU$, $Q_4 = C_4U_4 = \dfrac{4}{5}CU$. **3 body**

c) Kondenzátory jsou v tomto případě nabity tak, že celkový náboj dodaný zdrojem při nabíjení je stejně velký jako v a), tj. $Q_\mathrm{c} = Q_\mathrm{a} = \frac{7}{6}CU$. Po odpojení zdroje (rozepnutím S_1) sepneme spínač S_2, v důsledku čehož dojde k přerozdělení náboje na kondenzátorech oproti a) a ke změně kapacity soustavy, která teď bude stejně velká jako v případě b). Další postup bude shodný s postupem v případě b). Dostaneme

$$C_\mathrm{c} = C_\mathrm{b} = \frac{6}{5}C.$$

Narozdíl od úlohy b) ale dojde ke změně napětí na kondenzátorech. Vyjde

$$U_1' = U_3' = \frac{\frac{7}{6}CU}{C_{13}} = \frac{7}{12}U, \quad U_2' = U_4' = \frac{\frac{7}{6}CU}{C_{24}} = \frac{7}{18}U.$$

Celkové napětí na kondenzátorech při odpojeném zdroji pak bude

$$U' = U_1' + U_2' = \left(\frac{7}{12} + \frac{7}{18}\right)U = \frac{35}{36}U$$

a energie soustavy bude

$$E_\mathrm{c} = \frac{1}{2}C_\mathrm{c}U'^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{6}{5}C\cdot\left(\frac{35}{36}U\right)^2 = \frac{245}{432}CU^2.$$

Náboje na jednotlivých kondenzátorech pak jsou $Q_1' = C_1U_1' = \frac{7}{12}CU$, $Q_2' = C_2U_2' = \frac{7}{18}CU$, $Q_3' = C_3U_3' = \frac{7}{12}CU$, $Q_4' = C_4U_4' = \frac{7}{9}CU$.

2 body

d) Změna energie soustavy v jednotlivých případech je

$$\Delta E_\mathrm{b} = E_\mathrm{b} - E_\mathrm{a} = \frac{3}{5}CU^2 - \frac{7}{12}CU^2 = \frac{1}{60}CU^2 > 0,$$

$$\Delta E_\mathrm{c} = E_\mathrm{c} - E_\mathrm{a} = \frac{245}{432}CU^2 - \frac{7}{12}CU^2 = -\frac{7}{432}CU^2 < 0.$$

V případě b) energie soustavy vzroste, protože vzrostla kapacita soustavy a zdroj kondenzátory dobije, zatímco v případě c) energie soustavy klesne, třebaže vzroste kapacita soustavy, ale tentokrát k tomu dojde při odpojeném zdroji. Při přesunu nábojů na kondenzátorech vzniká ve vodičích Jouleovo teplo, což vede k celkovému poklesu energie soustavy.

2 body