Řešení praktické úlohy celostátního kola 53. ročníku fyzikální olympiády.

Autor úlohy: V. Vícha

1. úkol

Pro stav, kdy hustoměr plove, platí rovnováha tíhové a vztlakové síly (zatím zanedbáváme sílu povrchovou), tj.

$$mg = V_\mathrm{h}\varrho_\mathrm{k}g,$$

kde m je hmotnost hustoměru, g je tíhové zrychlení, V_h je objem ponořené části hustoměru, ϱ_k je hustota kapaliny.
Odtud pro hmotnost hustoměru dostaneme vztah

$$m = V_\mathrm{h}\varrho_\mathrm{k}.$$

Dále musíme určit objem ponořené části hustoměru, k čemuž využijeme poznatku, že po ponoření hustoměru stoupla hladina vody ve válci. Platí

$$V_\mathrm{h} = \pi\frac{d^2}{4}h_1,$$

kde d je průměr odměrného válce, h_1 je výška, o kterou při ponoření hustoměru stoupne hladina v odměrném válci.

Přímé určení průměru odměrného válce je vzhledem k provedení válce nemožné. Je třeba změřit papírovým měřítkem vnější obvod, z něj vypočítat vnější průměr a ztotožnit s vnitřním průměrem (tloušťka stěny lahve je malá, asi 0,2 mm).

Pro průměr d odměrného válce platí vztah $d = \frac{o}{\pi}$, kde o je obvod odměrného válce.
Pro hmotnost hustoměru tedy odvodíme vztah

$$m = \pi\frac{d^2}{4}h_1\varrho_\mathrm{k} = \frac{o^2h_1\varrho_\mathrm{k}}{4\pi}.$$

Typické naměřené hodnoty:

$\varrho_\mathrm{k} = (998 \pm 1)\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$	$\delta\varrho_\mathrm{k} = 0{,}1\ \%$
$o = (23{,}7 \pm 0{,}1)$ cm	$\delta o = 0{,}4\ \%$
$h_1 = (12 \pm 2)$ mm	$\delta h_1 = 17\ \%.$

Chyba 2 mm pro výšku h_1 vyplývá z toho, že výšku hladiny na měřítku odečítáme dvakrát.

Po dosazení vychází hmotnost hustoměru $m = 0{,}054$ kg.

Určíme relativní chybu $\delta m = 2\cdot\delta o+\delta h_1+\delta\varrho_{\mathrm{k}} = 2\cdot 0{,}4\ \%+17\ \%+0{,}1\ \% = 18\ \%$. Hmotnost hustoměru včetně určení chyby je

$$m = (0{,}054 \pm 0{,}014)\ \mathrm{kg}.$$

Hmotnost hustoměru při kontrolním vážení na digitální váze vyšla

$$m_{\text{váha}} = 0{,}053\ \mathrm{kg}.$$

Relativní odchylka hmotnosti vypočtené a hmotnosti určené vážením činí 1,9 %.

2. úkol

Základní myšlenkou pro určení neznámé hmotnosti m_{s} soli je rozpustit sůl ve vodě a změřit hustotu roztoku.

Do odměrného válce nalijeme definovaný objem vody V_1 (po značku 1,900 l) a hustoměrem určíme její hustotu ϱ_1. Z těchto údajů lze určit hmotnost vody $m_1 = \varrho_1 \cdot V_1$.

Nyní přichází důležitý krok – rozpuštění soli ve vodě. Kdo nasype sůl přímo do odměrného válce s vodou, nedosáhne dokonalého rozpuštění. Nerozpuštěná sůl se nahromadí na dně hlubokého válce a roztok bude silně nehomogenní. Je třeba dostatek vody odlít z válce do pomocné nádoby, v ní mícháním sůl dokonale rozpustit a roztok pak přilít zpět do odměrného válce. Hladina nyní bude výše než u značky 1,900 l. Na nalepeném měřítku určíme zvýšení hladiny h_2. Potom určíme přírůstek objemu $\Delta V = \dfrac{o^2 h_2}{4\pi}$ a hustoměrem změříme hustotu ϱ_2. Celkový objem roztoku je $V_2 = V_1 + \Delta V$. Pro hustotu roztoku platí

$$\varrho_2 = \frac{m_1 + m_{\mathrm{s}}}{V_2},$$

kde m_{s} je hmotnost soli.Hmotnost soli vyjádříme

$$m_{\mathrm{s}} = \varrho_2 V_2 - \varrho_1 V_1 = \varrho_2 \left(V_1 + \frac{o^2 h_2}{4\pi} \right) - \varrho_1 V_1.$$

Typické naměřené hodnoty:

$\varrho_1 = 998\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$
$V_1 = 1{,}900\ \mathrm{l}$
$o = 23{,}7\ \mathrm{cm}$
$h_2 = 4\ \mathrm{mm}$
$\varrho_2 = 1\,025\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$

Po dosazení vychází hmotnost soli $m_{\mathrm{s}} = 0{,}070\ \mathrm{kg}$.
Výpočet chyby tentokrát není požadován.

Hmotnost soli při kontrolním vážení na digitální váze vyšla $m_{\text{sváha}} = 0{,}072$ kg. Relativní odchylka hmotnosti vypočtené a hmotnosti určené vážením činí 2,8 %.

3. úkol

Pro objemovou teplotní roztažnost kapalin platí přibližný vztah

$$V = V_0[1 + \beta(t - t_0)],$$

kde V_0 je objem při teplotě t_0, V je objem při teplotě t, β je součinitel objemové teplotní roztažnosti.

Z výše uvedeného vztahu odvodíme přibližný vztah pro závislost hustoty kapaliny na teplotě

$$\varrho = \varrho_0[1 - \beta(t - t_0)],$$

kde ϱ_0 je hustota při teplotě t_0, ϱ je hustota při teplotě t, β je součinitel objemové teplotní roztažnosti, pro který odvodíme vztah

$$\beta = \frac{\varrho_0 - \varrho}{\varrho_0(t - t_0)}.$$

Do odměrného válce nalijeme libovolné množství vody a pomocí hustoměru, který je opatřen také teploměrem, změříme hustotu ϱ_0 a teplotu t_0. Pak vodu vyměníme za vodu teplejší a celý postup opakujeme, tj. změříme hustotu ϱ a teplotu t.

Typické naměřené hodnoty:

$\varrho_0 = (998 \pm 1)\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	$\delta\varrho_{\text{k}} = 0{,}1\ \%$
$t_0 = (18{,}0 \pm 0{,}5)\ °\text{C}$	$\delta t_0 = 2{,}8\ \%$
$\varrho = (992 \pm 1)\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	$\delta\varrho_{\text{k}} = 0{,}1\ \%$
$t = (42{,}0 \pm 0{,}5)\ °\text{C}$	$\delta t = 1{,}2\ \%$

Po dosazení vychází součinitel objemové teplotní roztažnosti

$$\beta = 2{,}5 \cdot 10^{-4}\ \text{K}^{-1}.$$

Určíme chybu a relativní chybu měření:

$$\Delta(\varrho_0 - \varrho) = 1\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3} + 1\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3} = 2\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3},\ \delta(\varrho_0 - \varrho) = \frac{2}{6} \cdot 100\ \% = 33{,}3\ \%.$$

$$\delta\varrho_0 = \frac{1}{998} \cdot 100\ \% = 0{,}1\ \%$$

$$\Delta(t - t_0) = 0{,}5\ ^\circ\mathrm{C} + 0{,}5\ ^\circ\mathrm{C} = 1\ ^\circ\mathrm{C},\ \delta(t - t_0) = \frac{1}{24} \cdot 100\ \% = 4{,}2\ \%.$$

$$\delta\beta = 33{,}3\ \% + 0{,}1\ \% + 4{,}2\ \% = 38\ \%,\ \Delta\beta = 1{,}0 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{K}^{-1}.$$

Souhrnem

$$\beta = (2{,}5 \pm 1{,}0) \cdot 10^{-4}\ \mathrm{K}^{-1}, \qquad \delta\beta = 38\ \%.$$

Porovnáme výsledek s tabulkami:

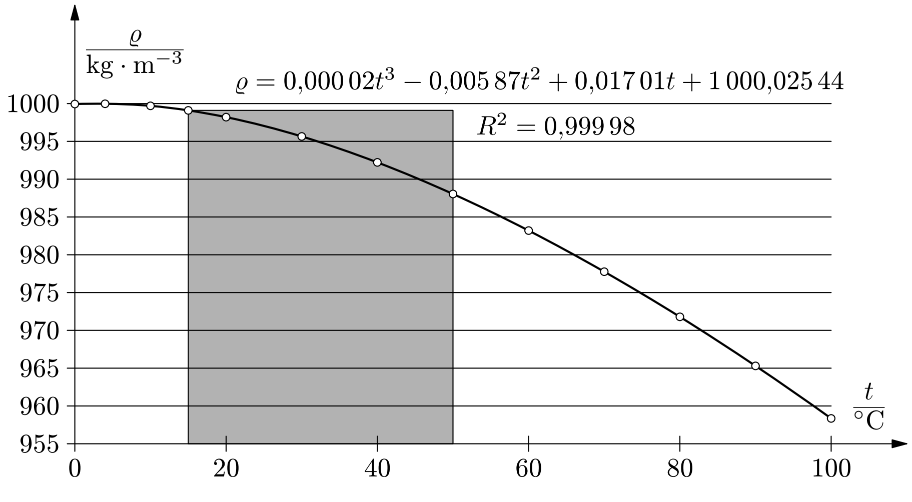
MFCHT pro střední školy (1988) uvádějí, že součinitel objemové teplotní roztažnosti pro vodu o teplotě 20 °C má hodnotu $\beta = 1{,}8 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{K}^{-1}$.

Přesnější představu o závislosti hustoty destilované vody v závislosti na teplotě získáme z tabulky a grafu (Zdroj: Čmelík, M., Machonský, L., Šíma, Z. *Fyzikální tabulky.* Liberec: TU Liberec, 2001.) níže uvedeným postupem.

$\frac{t}{^\circ\mathrm{C}}$	0	4	10	15	20	30
$\frac{\varrho}{\mathrm{kg \cdot m^{-3}}}$	999,941	999,973	999,701	999,099	998,205	995,651

$\frac{t}{^\circ\mathrm{C}}$	40	50	60	70	80	90	100
$\frac{\varrho}{\mathrm{kg \cdot m^{-3}}}$	992,22	988,04	983,2	977,76	971,79	965,3	958,35

Závislost hustoty destilované vody na teplotě



Z grafu je patrné, že v rozsahu 0 °C až 100 °C rozhodně nejde o lineární závislost. Pro naše měření však potřebujeme maximálně rozsah teplot od 15 °C do 50 °C (podbarvený obdélník). Z výše uvedeného grafu je vidět, že pro interval teplot od 18 °C do 42 °C, je možno linearizaci provést, aniž bychom se dopustili příliš velké chyby. Pro výpočet β potřebujeme dvě teploty a dvě hustoty, přičemž hustoty se dají buď změřit nebo vypočítat z teplot (polynomická funkce 3. stupně, která byla získána pomocí Excelu proložením hodnot v grafu). V obou případech budeme dosazovat do vztahu (linearizace)

$$\beta = \frac{\varrho_0 - \varrho}{\varrho_0 (t - t_0)}.$$

Experimentální určení hustot při odpovídajících teplotách dává výsledek $\beta = 2{,}5 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{K}^{-1}$, s relativní chybou 38 %, jak již bylo výše uvedeno. Porovnejme tento výsledek s výsledkem získaným výpočtem hustot. Pro teplotu $t_0 = 18\ ^\circ\mathrm{C}$ dostaneme hustotu

$$\varrho_0 = (2 \cdot 10^{-5} \cdot 18^3 - 5{,}87 \cdot 10^{-3} \cdot 18^2 + 17{,}01 \cdot 10^{-3} \cdot 18 + 1\,000{,}02544)\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3},$$

$$\varrho_0 = 998{,}79\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}.$$

Obdobně pro teplotu $t = 42\ ^\circ\mathrm{C}$ dostaneme hustotu

$$\varrho = (2 \cdot 10^{-5} \cdot 42^3 - 5{,}87 \cdot 10^{-3} \cdot 42^2 + 17{,}01 \cdot 10^{-3} \cdot 42 + 1\,000{,}02544)\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3},$$

$$\varrho = 991{,}87\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}.$$

Po dosazení vychází $\beta = 2{,}9 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{K}^{-1}$. Za správnější budeme považovat výsledek vypočtený z přesnějších hustot $\beta = 2{,}9 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{K}^{-1}$. Relativní odchylka obou výsledků činí 14 %.

Poznámka:

V této části úlohy jsme vlastně zjišťovali střední hodnotu teplotního součinitele β pro daný teplotní rozsah. Pokud bychom vzali v úvahu přesnou definici součinitele β pro určitou vztažnou teplotu

$$\beta = -\frac{1}{\varrho} \frac{\mathrm{d}\,\varrho}{\mathrm{d}\,t}$$

a dosadili do ní získanou polynomickou funkci, dostaneme vztah

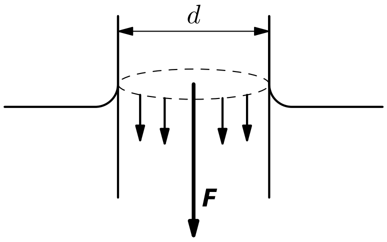
$$\beta = -\frac{6 \cdot 10^{-5} t^2 - 11{,}74 \cdot 10^{-3} t + 17{,}01 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-5} t^3 - 5{,}87 \cdot 10^{-3} t^2 + 17{,}01 \cdot 10^{-3} t + 1\,000{,}025\,44}\ \mathrm{K}^{-1}.$$

Pro teplotu $t_0 = 18\ ^\circ\mathrm{C}$ nám tento vztah dává hodnotu $\beta = 1{,}75 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{K}^{-1}$, pro teplotu $t = 42\ ^\circ\mathrm{C}$ nám tento vztah dává hodnotu $\beta = 3{,}73 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{K}^{-1}$. Námi experimentálně určená hodnota $\beta = 2{,}5 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{K}^{-1}$ leží mezi nimi, což je v pořádku.

4. úkol

Při odečítání hustoty v úrovni hladiny si nelze nepovšimnout, že hladina v okolí hustoměru je vzedmutá, což poněkud komplikuje odečet. Je to způsobeno tím, že voda smáčí skleněný hustoměr a působí na něj povrchovou silou.

Při dokonalém smáčení působí povrchová síla $\boldsymbol{F}$ ve směru tečny k povrchu kapaliny a „vtahuje“ tedy hustoměr do vody. Má stejný směr jako tíhová síla působící na hustoměr. Pro plovoucí hustoměr tedy přesněji platí rovnováha tří sil:



$$F_G + F = F_{\mathrm{vz}}.$$

Velikost povrchové síly určíme užitím vztahu

$$F = \sigma l = \sigma \pi d,$$

kde σ je povrchové napětí vody, l je obvod hustoměru, d je průměr hustoměru. Povrchové napětí vody při 20 °C má hodnotu $\sigma = 0{,}073\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$, průměr hustoměru je $d = 6{,}5$ mm. Potom vychází, že povrchová síla má velikost

$$F = 1{,}5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{N}.$$

Určíme poměr povrchové a tíhové síly: $\dfrac{F}{F_G} = \dfrac{F}{mg} = \dfrac{1{,}5 \cdot 10^{-3}}{0{,}054 \cdot 9{,}81} = 3 \cdot 10^{-3}$. Tedy $F = 0{,}003\, F_G$.

Povrchová síla činí 0,3 % tíhové síly ($\boldsymbol{F}$ míří ve směru tíhové síly). Velikost tíhové síly je tedy o 0,3 % menší, než jsme uvažovali v úkolu č.1. Velikost vztlakové síly proto bude o 0,3 % větší než odpovídá ponoření hustoměru. Jestliže hustoměr měří s relativní chybou 0,1 %, nemusí být obecně vliv povrchového napětí zanedbatelný.

V úkolu č. 1:

$$m'g + F = V_{\mathrm{h}} \varrho_{\mathrm{k}} g,$$

z čehož

$$m' = \frac{V_{\mathrm{h}} \varrho_{\mathrm{k}} g}{g}.$$

Správnější hodnota hmotnosti hustoměru je sice o 0,3 % nižší, to se ale v řádu gramů neprojeví.