Úlohy 1. kola 53. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie A*

Ve všech úlohách počítejte s tíhovým zrychlením $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

1. Srážka částic

Částice α (jádro helia) byla urychlena elektrickým polem z klidu na rychlost o velikosti $v \ll c$ a pohybuje se přímočaře k volnému protonu, který je v klidu. Proton má elektrický náboj $+e$ a hmotnost m, elektrický náboj částice α je $+2e$ a její hmotnost s dostatečnou přesností $4m$. Částice na sebe působí pouze elektrickou silou. Celý děj probíhá ve vakuu.

a) Určete elektrické napětí U, kterým byla částice α urychlena.
b) Určete velikosti u_1, u_2 konečných rychlostí po vzájemné interakci.
c) Určete minimální vzdálenost r_m, na kterou se částice během vzájemného působení přiblíží.

Elektrická potenciální energie bodových nábojů Q_1, Q_2 ve vzájemné vzdálenosti r je při volbě nulové energie v nekonečné vzdálenosti nábojů rovna

$$E_\mathrm{p} = \frac{kQ_1Q_2}{r}.$$

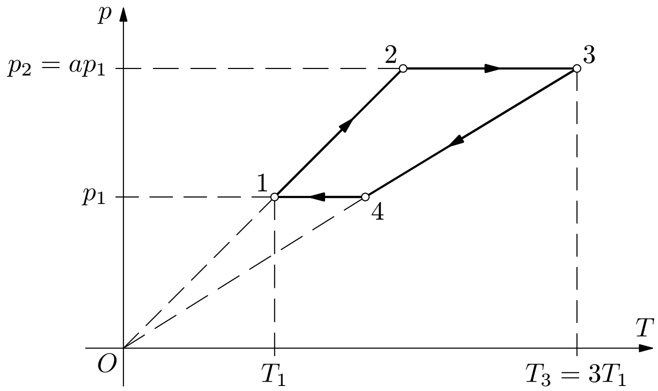
Řešte nejprve obecně, pak pro dané hodnoty: $k = 8{,}99 \cdot 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot C^{-2}}$, $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}$, $m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$, $v = 2{,}5 \cdot 10^6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

2. Kruhový děj

Na obr. 1 je znázorněn kruhový děj v ideálním plynu s jednoatomovými molekulami o látkovám množství n. Nejmenší teplota, které plyn v průběhu děje dosáhne, je T_1 při tlaku p_1. Největší teplota $3T_1$ nastane při tlaku $p_2 = ap_1$, kde $1 < a < 3$.

a) Charakterizujte jednotlivé děje 1–2, 2–3, 3–4, 4–1, ze kterých se kruhový děj skládá, a překreslete tento děj do p–V diagramu.
b) Odvoďte obecně vztah pro výpočet práce vykonané plynem za jeden cyklus kruhového děje (pomocí p_1, V_1, a).
c) Odvoďte obecně vztah pro výpočet účinnosti kruhového děje jako funkce proměnné a.
d) Určete maximální účinnost kruhového děje a pro které a toto nastane.

Vnitřní energie plynu s jednoatomovými molekulami je $U = \dfrac{3}{2}nRT$.



Obr. 1

3. Bóje

Na hladině vodní nádrže plove bóje vyrobená jako dutá ocelová koule tak, že výška kulového vrchlíku vyčnívajícího nad hladinu je $v = 11$ cm. Jestliže bóji jemně zatlačíme do vody a uvolníme, bude konat malé kmity ve svislém směru s periodou $T = 1{,}05$ s.

a) Na základě změřených hodnot určete vnější poloměr koule. Řešte obecně i číselně.

b) Vypočítejte hmotnost koule a tloušťku její stěny.

Při řešení úlohy předpokládejte, že kmity koule na hladině jsou netlumené. Hustota vody $\varrho_\mathrm{v} = 1{,}00 \cdot 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, hustota oceli $\varrho = 7{,}8 \cdot 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.

Objem kulové úseče s výškou v, která vznikne z koule o poloměru R, a objem zbytku koule jsou

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi v^2 (3R - v), \qquad V_2 = \frac{1}{3}\pi (2R - v)^2 (R + v).$$

4. Štěpení uranu

Přírodní čistý uran tvoří směs izotopů $^{235}\mathrm{U}$ a $^{238}\mathrm{U}$, přičemž $p_1 = 0{,}72$ % hmotnosti připadá na $^{235}\mathrm{U}$ a zbytek na $^{238}\mathrm{U}$. Poločas rozpadu $^{235}\mathrm{U}$ je $T_1 = 7{,}038 \cdot 10^8$ let, poločas rozpadu ^{238}U je $T_2 = 4{,}468 \cdot 10^9$ let.

a) Jaká je aktivita vzorku přírodního uranu o hmotnosti $m = 1$ kg?

b) V gabunském Oklo došlo před asi 1,9 mld. let k zapálení přírodního reaktoru. Jaké bylo tehdy procentuální hmotnostní zastoupení $^{235}\mathrm{U}$ v přírodním čistém uranu?

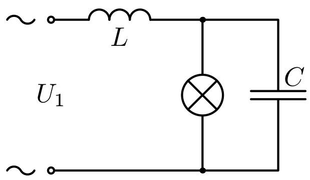
Při rozštěpení jádra ^{235}U pomalými neutrony může vzniknout např. jádro $^{143}_{56}$Ba s klidovou hmotností $m_{\mathrm{Ba}} = 142{,}920\,62\ m_{\mathrm{u}}$ a jádro $^{90}_{36}$Kr s klidovou hmotností $m_{\mathrm{Kr}} = 89{,}919\,524\ m_{\mathrm{u}}$.

c) Napište rovnici reakce a vypočítejte energii reakce. Klidová hmotnost neutronu $m_{\mathrm{n}} = 1{,}008\,664\,9\ m_{\mathrm{u}}$, klidová hmotnost jádra ^{235}U je $m_{\mathrm{U}} = 235{,}043\,9\ m_{\mathrm{u}}$.

d) Štěpení uranu v přírodním reaktoru probíhalo asi 500 000 let a vyhořelo přitom asi 5 tun ^{235}U. Jaká energie se přitom uvolnila, předpokládáme-li že se při rozštěpení jednoho jádra uvolní průměrně energie $E_1 = 200$ MeV? Porovnejte tuto energii s průměrnou denní spotřebou jednoho člověka (veškerou energií spotřebovanou civilizací za jeden den v průmyslu, v dopravě, při vytápění atd. vydělenou počtem obyvatel planety), která se odhaduje na 0,36 GJ.

5. Zvětšení napětí

Žárovku se jmenovitými hodnotami napětí $U = 24$ V a proudu $I = 0{,}3$ A potřebujeme napájet ze zdroje střídavého proudu o efektivní hodnotě svorkového napětí $U_1 = 12$ V a frekvenci 50 Hz. Použijeme k tomu obvod zapojený podle obr. 2. Kondenzátor připojený paralelně k žárovce má dostatečně velkou kapacitu $C = 100$ μF.



Obr. 2

a) Jakou indukčnost L musí mít cívka, aby napětí na žárovce mělo jmenovitou hodnotu?

b) Jaké bude fázové posunutí napětí na žárovce oproti svorkovému napětí zdroje?

Kondenzátor a cívku považujte za ideální, vnitřní odpor zdroje je zanedbatelný.

6. *Praktická úloha:* Měření ohniskové vzdálenosti čočky Besselovou metodou

Předmět (např. svíčka) a stínítko postavíme kolmo na optickou osu tenké spojky tak, aby jejich vzájemná vzdálenost byla l. Budeme-li pohybovat čočkou po optické ose v prostoru mezi předmětem a stínítkem, vytvoří se za určitých podmínek ostrý obraz při dvou polohách čočky.

a) Stanovte, jakou podmínku musí splňovat poměr $\frac{l}{f}$, aby toto bylo splněno.

b) Odvoďte vztahy pro výpočet poloh čočky a_1, a_2, aby oba obrazy byly ostré.

c) Označme $d = |a_1 - a_2|$. Dokažte, že pro ohniskovou vzdálenost čočky platí

$$f = \frac{l^2 - d^2}{4l}.$$

d) Proveďte vlastní měření l a d pro danou tenkou spojnou čočku. Pak proveďte výpočet ohniskové vzdálenosti čočky. Měření proveďte pro pět různých vzdáleností l, k nimž pak odměříte příslušná d.

7. Činka

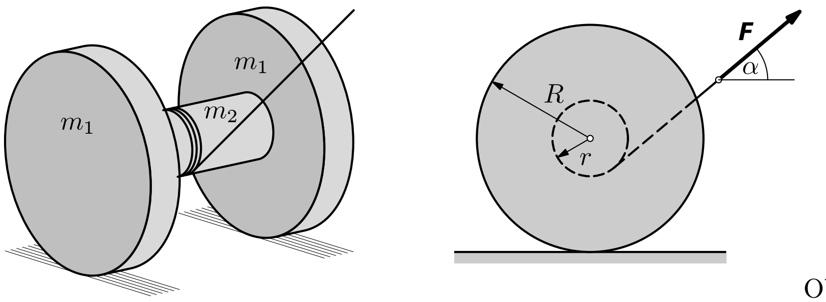
Na vodorovné rovině leží malá činka, která se skládá ze dvou válců, každý o hmotnosti m_1 a poloměru R a spojovací tyče tvaru válce o hmotnosti m_2 a poloměru r. Uprostřed činky je namotáno tenké pevné vlákno zanedbatelné hmotnosti, na jehož konci působí síla $\boldsymbol{F}$; vlákno svírá s vodorovnou rovinou úhel α (obr. 3). Součinitel smykového tření mezi činkou a vodorovnou rovinou je f.

a) Určete úhel α_0, při kterém se bude činka smýkat rovnoměrným pohybem po vodorovné rovině bez otáčení a velikost F_0 síly, kterou přitom musíme na vlákno působit.

b) Jaká může být nejvýše velikost síly, kterou působíme na vlákno, aby se činka odvalovala po vodorovné rovině bez smýkání, jestliže sklon vlákna je 1. $\alpha_1 < \alpha_0$, 2. $\alpha_2 > \alpha_0$? S jakým zrychlením se přitom bude pohybovat střed činky?

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty: $m_1 = 1{,}00$ kg, $m_2 = 0{,}50$ kg, $r = 1{,}50$ cm, $R = 5{,}00$ cm, $f = 0{,}25$, $\alpha_1 = 30°$, $\alpha_2 = 80°$.

V obecném řešení označte celkovou hmotnost činky m a moment setrvačnosti činky vzhledem k ose otáčení J.



Obr. 3