Řešení úloh 1. kola 53. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie A*

Autoři úloh: J. Jírů (1), M. Jarešová (2, 6), J. Thomas (4, 7), P. Šedivý (3, 5)

1. a) Vzhledem k tomu, že $v \ll c$, můžeme s dostatečnou přesností použít zákony klasické fyziky. Elektrické pole vykoná práci, která je rovna kinetické energii částice α:

$$2e \cdot U = \frac{1}{2} \cdot 4m \cdot v^2 \quad \Rightarrow \quad U = \frac{mv^2}{e} = 65\ \mathrm{kV}.$$

2 body

b) Celá interakce probíhá jako dokonale pružný ráz dvou těles. Platí zákon zachování hybnosti a zákon zachování mechanické energie:

$$4mv = 4mu_1 + mu_2, \qquad \frac{1}{2} \cdot 4m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 4m \cdot u_1^2 + \frac{1}{2}mu_2^2.$$

Řešením soustavy dostaneme dvě řešení:

$$1)\ u_1 = v,\ u_2 = 0, \qquad 2)\ u_1 = 0{,}6v,\ u_2 = 1{,}6v.$$

První řešení udává hodnoty před rázem, teprve druhé řešení hodnoty po rázu. Hledané velikosti rychlostí tedy jsou: $u_1 = 0{,}6v = 1{,}5 \cdot 10^6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $u_2 = 1{,}6v = 4{,}0 \cdot 10^6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. **4 body**

c) V první fázi srážky se částice α přibližuje k protonu a je odpudivou elektrickou silou brzděna, současně je proton reakcí urychlován. V okamžiku, kdy se rychlosti obou částic rovnají, dosáhnou hledané minimální vzdálenosti. Od tohoto okamžiku se částice začnou od sebe vzdalovat do dosažení konečných rychlostí $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$. Označme u velikost společné rychlosti obou částic v okamžiku minimální vzdálenosti r_m. Platí ZZH a ZZE:

$$4mv = 4mu + mu, \qquad \frac{1}{2} \cdot 4m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 4m \cdot u^2 + \frac{1}{2}mu^2 + \frac{k \cdot e \cdot 2e}{r_\mathrm{m}}.$$

Z rovnic plyne

$$r_\mathrm{m} = \frac{5ke^2}{mv^2} = 1{,}1 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{m}.$$

4 body

Poznámky:

1) Poměr hmotností částice α a protonu je s přesností na 4 platné číslice roven 3,973, tj. relativní odchylka způsobená zaokrouhlením poměru na 4 je přibližně 0,7 %.

2) Vlastní poloměr částice α je přibližně $2 \cdot 10^{-15}$ m, tedy k přímému kontaktu částic nedojde – částice se přiblíží zhruba na 50násobek poloměru částice α.

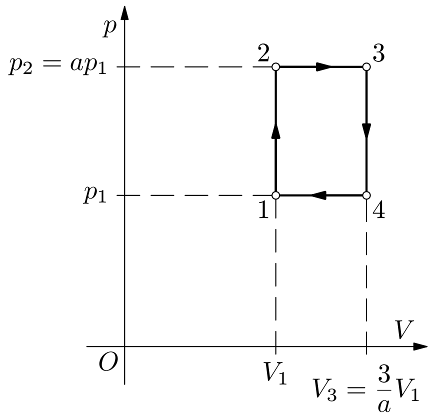
2. a) Nejprve popíšeme jednotlivé děje.

Děj 1-2 je izochorický, 2-3 je izobarický, 3-4 je izochorický, 4-1 je izobarický.

Ve stavu 1 platí $p_1V_1 = nRT_1$, z čehož $V_1 = \dfrac{nRT_1}{p_1}$.

Ve stavu 3 platí $ap_1V_3 = nR{\cdot}3T_1$,

z čehož $V_3 = \dfrac{nR \cdot 3T_1}{ap_1} = \dfrac{3}{a}V_1$.



Obr. R1

2 body

b) Platí

$$W' = (p_3 - p_1)\cdot(V_3 - V_1) = (ap_1 - p_1)\cdot\left(\frac{3}{a}V_1 - V_1\right) = (a-1)\cdot\left(\frac{3}{a} - 1\right)p_1V_1.$$

Z výsledku vyplývá, že $a < 3$.

2 body

c) Nejprve určíme teplo Q, které je třeba při kruhovém ději dodat:

$$Q = Q_{12} + Q_{23} = \frac{3}{2}nR(T_2 - T_1) + p_2(V_3 - V_1) + \frac{3}{2}nR(T_3 - T_2).$$

Po úpravě

$$Q = \frac{3}{2}nR \cdot 2T_1 + ap_1\left(\frac{3}{a} - 1\right)V_1 = (6 - a)p_1V_1.$$

Účinnost je pak dána vztahem

$$\eta = \frac{W'}{Q} = \frac{(a-1)\left(\dfrac{3}{a} - 1\right)}{6 - a} = \frac{4 - \dfrac{3}{a} - a}{6 - a}.$$

3 body

d) Maximální účinnost určíme pomocí derivace výrazu pro účinnost podle proměnné a. Dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\frac{4 - \dfrac{3}{a} - a}{6 - a} = \frac{-2(a^2 + 3a - 9)}{a^2(6 - a)^2}.$$

Nyní položíme první derivaci rovnou nule, tj. $\dfrac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}a} = 0$, z čehož

$$a^2 + 3a - 9 = 0.$$

Dostali jsme kvadratickou rovnici v proměnné a. Úloze vyhovuje pouze kladný kořen

$$a_0 = \frac{3}{2}(\sqrt{5} - 1) \doteq 1{,}85.$$

Této hodnotě a_0 odpovídá účinnost

$$\eta_{\max} = \frac{\left[\dfrac{3}{2}(\sqrt{5} - 1) - 1\right] \cdot \left[\dfrac{3}{\dfrac{3}{2}(\sqrt{5} - 1)} - 1\right]}{6 - \dfrac{3}{2}(\sqrt{5} - 1)} = \frac{1}{6}(3 - \sqrt{5}) \doteq 0{,}13.$$

O tom, že se jedná o maximum, se přesvědčíme dosazením hodnot za a z okolí a_0. Např. pro $a = 1{,}5$ je $\eta_1 = 0{,}11$, pro $a = 2{,}5$ je $\eta_2 = 0{,}09$, a tedy pro $a = a_0 = \dfrac{3}{2}(\sqrt{5} - 1)$ má kruhový děj maximální účinnost, $\eta_{\max} = 0{,}13$.

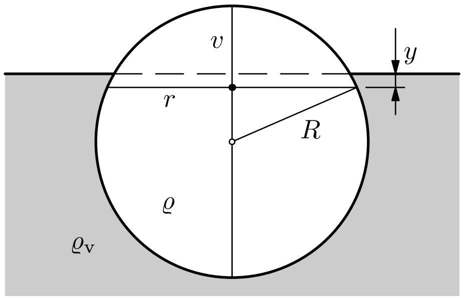
3 body

3. a) V rovnovážné poloze je tíhová síla působící na bóji v rovnováze se silou vztlakovou. Podle Archimédova zákona má bóje hmotnost

$$m = V_2\varrho_{\mathrm{v}} = \frac{1}{3}\pi(2R - v)^2(R + v)\varrho_{\mathrm{v}}. \tag{1}$$

Vychýlíme-li kouli z rovnovážné polohy dolů o $y \ll R$ (obr. R2), působí na kouli směrem vzhůru výsledná síla rovná přírůstku vztlakové síly

$$\Delta V \varrho_{\mathrm{v}} g \approx \pi r^2 y \varrho_{\mathrm{v}} g = \pi(2R - v) v y \varrho_{\mathrm{v}} g = ky.$$



Obr. R2

Při malých výchylkách je tedy výsledná síla působící na kouli přímo úměrná výchylce z rovnovážné polohy a má opačný směr. Konstanta úměrnosti je

$$k = \pi(2R - v)v\varrho_\mathrm{v}g.$$

Koule kmitá podobně jako závaží na pružině s periodou

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\pi(2R - v)v\varrho_\mathrm{v}g}}. \tag{2}$$

4 body

Vyjádříme-li m z (2) a porovnáme s (1), dostaneme rovnici s neznámou R:

$$m = \frac{T^2(2R - v)v\varrho_\mathrm{v}g}{4\pi} = \frac{1}{3}\pi(2R - v)^2(R + v)\varrho_\mathrm{v}.$$

Rovnici vydělíme výrazem $2R - v$, který je zřejmě větší než 0, a po úpravě dojdeme ke kvadratické rovnici

$$8\pi^2R^2 + 4\pi^2vR - 4\pi^2v^2 - 3vgT^2 = 0.$$

Úloze vyhovuje kořen

$$R = \frac{-\,4\pi^2v + \sqrt{144\pi^4v^2 + 96\pi^2vgT^2}}{16\pi^2} = \frac{-\,\pi v + \sqrt{9\pi^2v^2 + 6vgT^2}}{4\pi}.$$

Číselně vychází $R \doteq 20{,}1$ cm.

4 body

b) Dosazením do (1) dostaneme $m \doteq 28$ kg. Označme R_1 poloměr dutiny. Platí

$$m = \frac{4}{3}\pi(R^3 - R_1^3)\varrho \quad \Rightarrow \quad R_1^3 = R^3 - \frac{3m}{4\pi\varrho},$$

$$R_1 = \sqrt[3]{R^3 - \frac{3m}{4\pi\varrho}} \doteq 19{,}3 \text{ cm}.$$

Tloušťka stěny bóje je $R - R_1 = R - \sqrt[3]{R^3 - \dfrac{3m}{4\pi\varrho}} \doteq 7{,}2$ mm.

2 body

4. a) Aktivita je definována jako počet rozpadů za sekundu. V 1 kg přírodního uranu je

$$N_1 = \frac{p_1 m}{100 M_{\mathrm{m}1}} N_\mathrm{A} = \frac{0{,}007\,2}{235 \cdot 10^{-3}} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} = 1{,}845 \cdot 10^{22} \text{ atomů } {}^{235}\mathrm{U} \quad \text{a}$$

$$N_2 = \frac{p_2 m}{100 M_{\mathrm{m}2}} N_\mathrm{A} = \frac{0{,}992\,8}{238 \cdot 10^{-3}} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} = 2{,}512 \cdot 10^{24} \text{ atomů } {}^{238}\mathrm{U}.$$

Jejich aktivita je

$$A = A_1 + A_2 = \frac{\ln 2}{T_1} N_1 + \frac{\ln 2}{T_2} N_2 =$$
$$= \frac{0{,}693}{365{,}25 \cdot 24 \cdot 3\,600} \cdot \left(\frac{1{,}845 \cdot 10^{22}}{7{,}038 \cdot 10^{8}} + \frac{2{,}512 \cdot 10^{24}}{4{,}468 \cdot 10^{9}} \right) = 1{,}29 \cdot 10^7 \text{ Bq}.$$

2 body

b) Před dobou $t = 1{,}9 \cdot 10^9$ let byl počet atomů ^{235}U a ^{238}U, které dnes tvoří jeden kilogram

$$N_{01} = N_1 \cdot 2^{\frac{t}{T_1}} \quad \text{a} \quad N_{02} = N_2 \cdot 2^{\frac{t}{T_2}}$$

a jejich poměr

$$\frac{N_{02}}{N_{01}} = \frac{N_2}{N_1} \cdot 2^{\left(\frac{t}{T_2} - \frac{t}{T_1}\right)} = \frac{2{,}512 \cdot 10^{24}}{1{,}845 \cdot 10^{22}} \cdot 2^{\left(\frac{1{,}9 \cdot 10^9}{4{,}468 \cdot 10^9} - \frac{1{,}9 \cdot 10^9}{7{,}038 \cdot 10^8}\right)} = 28{,}14.$$

Poměr počtů částic ^{238}U a ^{235}U byl tehdy 28,14 : 1, poměr hmotností obou izotopů uranu byl

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{N_{02}}{N_{01}} \cdot \frac{A_{\mathrm{r}2}}{A_{\mathrm{r}1}} = 28{,}50.$$

Jestliže $m_1 + m_2 = 1$ kg, pak

$$m_1 + 28{,}50 m_1 = 1 \text{ kg}, \quad \rightarrow \quad m_1 = \frac{1 \text{ kg}}{29{,}50} = 0{,}033\,9 \text{ kg}, \quad m_2 = 0{,}966\,1 \text{ kg}.$$

V jednom kilogramu přírodního uranu bylo tedy 3,39 % izotopu ^{235}U a 96,61 % izotopu ^{238}U.

3 body

c) Jde o reakci ${}^{235}_{92}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{143}_{56}\mathrm{Ba} + {}^{90}_{36}\mathrm{Kr} + 3{}^{1}_{0}n$.
Uvolněná energie při rozštěpení jednoho jádra je

$$\Delta m \cdot c^2 = (m_{\mathrm{U}} - m_{\mathrm{Ba}} - m_{\mathrm{Kr}} - 2m_{\mathrm{n}})c^2 =$$
$$= (235{,}043\,9 - 142{,}920\,62 - 89,919\,524 - 2 \cdot 1{,}008\,66) \cdot \mathrm{u} \cdot c^2 =$$
$$= 0{,}186\,4 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16} = 2{,}785 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{J} = 174\ \mathrm{MeV}.$$

3 body

d) 5 tun ^{235}U obsahuje

$$N = \frac{m}{M_{\mathrm{m}}} N_{\mathrm{A}} = \frac{5\,000}{235 \cdot 10^{-3}} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} = 1{,}28 \cdot 10^{28}\ \text{atomů}.$$

Jejich přeměnou se uvolnila energie

$$E = N.E_1 = 1{,}28 \cdot 10^{28} \cdot 200\ \mathrm{MeV} = 2{,}56 \cdot 10^{30}\ \mathrm{MeV} = 4{,}1 \cdot 10^{8}\ \mathrm{GJ},$$

což je denní spotřeba 1,1 mld. lidí. **2 body**

5. *Řešení užitím fázorových diagramů*

a) Kondenzátorem prochází proud $I_C = \dfrac{U}{X_C} = U\omega C = 0{,}754\ \mathrm{A}.$

Fázor proudu procházejícího cívkou je součtem fázorů proudů procházejících žárovkou a kondenzátorem (obr. R3). Má velikost

$$I_L = \sqrt{I^2 + I_C^2} = 0{,}811\ \mathrm{A}$$

a předbíhá fázově před napětím na žárovce o úhel $\varphi = \mathrm{arctg}\dfrac{I_C}{I} = 68{,}3°.$

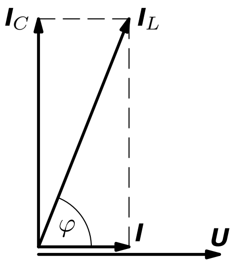
Fázor napětí na cívce tedy předbíhá před napětím na žárovce o $90° + \varphi = 158{,}3°$. Z fázorového diagramu na obr. R4 odvodíme užitím kosinové věty kvadratickou rovnici pro U_L:

$$U_1^2 = U^2 + U_L^2 - 2UU_L \cos(90° - \varphi) = U^2 + U_L^2 - 2UU_L \sin\varphi,$$
$$U_L^2 - 2UU_L \sin\varphi + U^2 - U_1^2 = 0,$$
$$\{U_L\}^2 - 44{,}6\{U_L\} + 432 = 0.$$

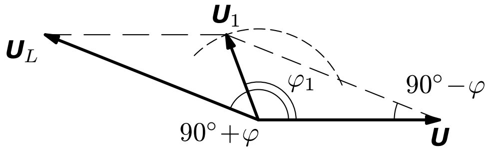
Oba kořeny rovnice $U_{L1} = 30{,}4\ \mathrm{V}$ a $U_{L2} = 14{,}2\ \mathrm{V}$ vyhovují. (V obr. R4 je zakresleno pouze U_{L1}.) Můžeme tedy použít cívku o indukčnosti

$$L_1 = \frac{U_{L1}}{\omega I_L} = 0{,}119\ \mathrm{H} \quad \text{nebo} \quad L_2 = \frac{U_{L2}}{\omega I_L} = 0{,}056\ \mathrm{H}.$$

7 bodů



Obr. R3



Obr. R4

b) Fázové posunutí φ_1 napětí na žárovce oproti napětí zdroje určíme z obr. R4 užitím kosinové věty:

$$U_L^2 = U^2 + U_1^2 - 2UU_1 \cos\varphi_1 \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi_1 = \frac{U^2 + U_1^2 - U_L^2}{2UU_1}.$$

Použijeme-li cívku o indukčnosti L_1, bude $\cos\varphi_1 = -0{,}352$ a napětí na žárovce bude fázově opožděno o $\varphi_1 = 111°$, použijeme-li cívku o indukčnosti L_2, bude $\cos\varphi_1 = 0{,}899$ a napětí na žárovce bude fázově opožděno o $\varphi_1 = 26°$. **3 body**

Řešení symbolickou metodou

a) Žárovka má za provozu odpor $R = U/I = 80\ \Omega$. Impedance paralelního spojení žárovky a kondenzátoru je

$$\boldsymbol{Z} = \frac{\dfrac{R}{\mathrm{j}\omega C}}{R + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}} = \frac{R}{1 + \mathrm{j}R\omega C},$$

celková impedance obvodu je

$$\boldsymbol{Z}_1 = \frac{R}{1 + \mathrm{j}R\omega C} + \mathrm{j}\omega L.$$

Platí

$$\frac{\boldsymbol{U}}{\boldsymbol{U}_1} = \frac{\boldsymbol{Z}}{\boldsymbol{Z}_1} = \frac{\dfrac{R}{1 + \mathrm{j}R\omega C}}{\dfrac{R}{1 + \mathrm{j}R\omega C} + \mathrm{j}\omega L} = \frac{1}{1 - \omega^2 CL + \mathrm{j}\dfrac{\omega L}{R}}, \tag{1}$$

$$\frac{U}{U_1} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 CL)^2 + \omega^2 \dfrac{L^2}{R^2}}}.$$

Úpravou dojdeme ke kvadratické rovnici pro L:

$$\left(\omega^4 C^2 + \frac{\omega^2}{R^2}\right) L^2 - 2\omega^2 CL + 1 - \left(\frac{U_1}{U}\right)^2 = 0,$$

$$112{,}83\{L\}^2 - 19{,}74\{L\} + 0{,}75 = 0,$$

která má kořeny $L_1 = 0{,}119\ \mathrm{H}$, $L_2 = 0{,}056\ \mathrm{H}$.

b) Fázové posunutí φ_1 fázoru $\boldsymbol{U}$ oproti fázoru $\boldsymbol{U}_1$ určíme jako rozdíl argumentů čitatele a jmenovatele ve zlomku (1):

$$\varphi_1 = 0 - \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{R(1 - \omega^2 CL)}.$$

Pro $L = 0{,}119\ \mathrm{H}$ vychází $\varphi_1 = -111°$, pro $L = 0{,}056\ \mathrm{H}$ vychází $\varphi_1 = -26°$.

6. a) Platí zobrazovací rovnice

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f},$$

kde platí $a + a' = l$. Po dosazení do zobrazovací rovnice dostaneme

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{l - a} = \frac{1}{f}.$$

Po úpravě obdržíme kvadratickou rovnici v proměnné a:

$$a^2 - al + lf = 0. \tag{1}$$

Mají-li vzniknout dva ostré obrazy, musí mít rovnice (1) dva různé reálné kořeny, tj. diskriminant $D = l^2 - 4lf > 0$, z čehož $\dfrac{l}{f} > 4$.

b) Řešením kvadratické rovnice dostaneme

$$a_1 = \frac{1}{2}(l + \sqrt{l^2 - 4lf}), \qquad a_2 = \frac{1}{2}(l - \sqrt{l^2 - 4lf}).$$

c) Určíme $d = |a_1 - a_2| = \sqrt{l^2 - 4lf}$. Po umocnění dostaneme $d^2 = l^2 - 4lf$, z čehož

$$f = \frac{l^2 - d^2}{4l}. \tag{2}$$

d) Než začneme s vlastním měřením ohniskové vzdálenosti čočky, musíme nastavit vhodnou vzdálenost mezi předmětem a stínítkem, abychom při pohybu čočky po optické ose v prostoru mezi předmětem a stínítkem obdrželi v průběhu pohybu dva ostré obrazy. Pak změříme příslušnou vzdálenost l, následně si označíme polohy čočky, při níž obrazy vzniklé na stínítku byly ostré. Po změření vzdálenosti těchto poloh již můžeme užitím vztahu (2) určit ohniskovou vzdálenost čočky.

7. a) Na činku působí tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$, reakce podložky, která má normálovou složku $\boldsymbol{N}$ a vodorovnou složku $\boldsymbol{T}$ (smykové tření mezi činkou a podložkou), a síla $\boldsymbol{F}_0$ (obr. R5). Nemá-li mít síla $\boldsymbol{F}_0$ otáčivý účinek, musí její vektorová přímka procházet bodem, který leží na spojnici bodů dotyku činky s rovinou. Pak

$$\cos\alpha_0 = \frac{r}{R}.$$

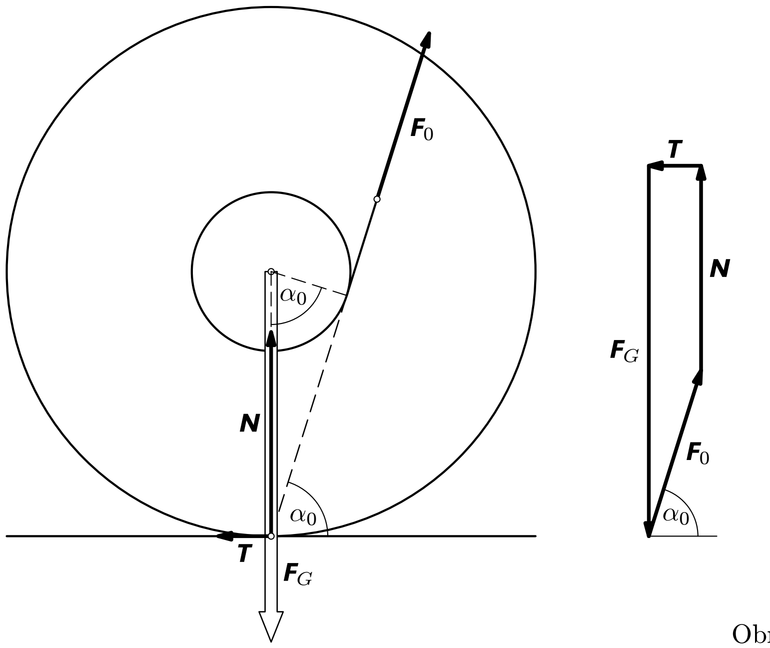
Při rovnoměrném smýkání činky po podložce platí $T = fN$. Všechny uvedené síly jsou v rovnováze a tvoří uzavřený mnohoúhelník. Z něj odvodíme

$$T = F_0 \cos\alpha_0 = fN = f(F_G - F_0 \sin\alpha_0),$$

$$F_0 = \frac{fmg}{\cos\alpha_0 + f\sin\alpha_0} = \frac{f(2m_1+m_2)g}{\dfrac{r}{R} + f\sqrt{1-\dfrac{r^2}{R^2}}}.$$

Pro dané hodnoty vychází $\alpha_0 = 72{,}5°$, $F_0 = 11{,}4\,\mathrm{N}$.

2 body



Obr. R5

b) Zvolíme-li kladnou orientaci veličin $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{\varepsilon}$ podle obr. R6, můžeme zapsat pohybové rovnice činky ve tvaru

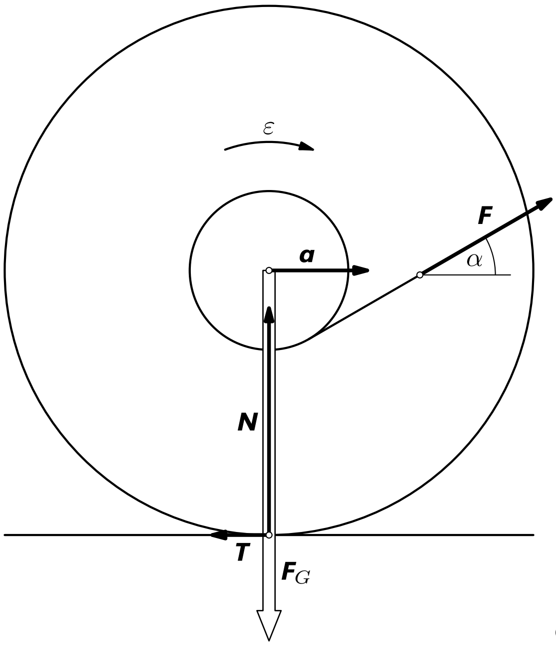
$$ma = F\cos\alpha - T, \qquad F_G - N - F\sin\alpha = 0,$$

$$J\varepsilon = J\frac{a}{R} = TR - Fr.$$

Řešením soustavy dostaneme

$$a = \frac{FR(R\cos\alpha - r)}{J + mR^2}, \qquad T = \frac{F(mrR + J\cos\alpha)}{J + mR^2}, \qquad N = mg - F\sin\alpha.$$

3 body



Obr. R6

Nemá-li dojít k prokluzování činky, musí být splněna podmínka $T \leq fN$. Řešením nerovnice

$$\frac{F(mrR + J\cos\alpha)}{J + mR^2} \leq f(mg - F\sin\alpha)$$

dostaneme

$$F \leq \frac{fmg(J + mR^2)}{mrR + J\cos\alpha + f\sin\alpha(J + mR^2)}\,.$$ **3 body**

Moment setrvačnosti činky je $J = 2\cdot\dfrac{1}{2}m_1R^2 + \dfrac{1}{2}m_2r^2 = 2{,}556\cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg\cdot m^2}$.

Pro $\alpha = \alpha_1 = 30°$ je mezní velikost síly, kterou působíme na vlákno
$F_1 = 10{,}40$ N a odpovídající zrychlení středu činky $a_1 = 1{,}67\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Pro $\alpha = \alpha_2 = 80°$ je mezní velikost síly, kterou působíme na vlákno
$F_2 = 12{,}03$ N a odpovídající zrychlení středu činky $a_2 = -0{,}43\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

V prvním případě se cívka valí tak, že se vlákno navíjí, v druhém případě se vlákno z cívky odmotává.

2 body

Poznámka: Bude-li velikost síly větší než F_1 resp. F_2, bude cívka současně prokluzovat. Pak $T = fN$.