Řešení úloh 1. kola 52. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie D*

Autoři úloh: J. Jírů (1 až 6), M. Jarešová (7)

1.a) Označme s dráhu mezi vesnicemi, t_1 čas jízdy na kole, t_2 čas chůze, t_3 čas běhu a $v_1 = 27\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$, $v_2 = 5\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$, $v_3 = 9\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$ jednotlivé rychlosti. Pak Petrova průměrná rychlost pohybu je

$$v_\mathrm{p} = \frac{2s}{t_1 + t_2}, \quad \text{kde} \quad t_1 = \frac{s}{v_1}, \quad t_2 = \frac{s}{v_2}.$$

Po dosazení a úpravě dostaneme $v_\mathrm{p} = \dfrac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}$.

Číselně vychází $8{,}44\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Jelikož Pavlova rychlost běhu $v_3 > v_\mathrm{p}$, vrátí se do Lhoty dříve Pavel. **4 body**

b) K sestrojení grafu je nutné vypočítat vzdálenost mezi vesnicemi a zbývající časy.

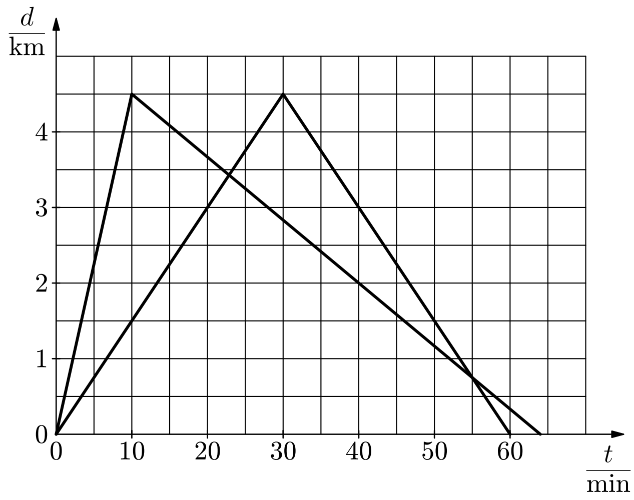
Vzdálenost mezi vesnicemi je $s = v_1t_1 = 27\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} \cdot \dfrac{1}{6}\ \mathrm{h} = 4{,}5\ \mathrm{km}$.

Petr se vrátil pěšky z Rovné do Lhoty za dobu

$$t_2 = \frac{s}{v_2} = \frac{4{,}5\ \mathrm{km}}{5\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}} = 0{,}9\ \mathrm{h} = 54\ \mathrm{min}.$$

Celková doba Petrova pohybu je je 1 h 4 min.

Celková doba Pavlova běhu je $t_3 = \dfrac{2s}{v_3} = \dfrac{2 \cdot 4{,}5\ \mathrm{km}}{9\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}} = 60\ \mathrm{min}.$



4 body

Z grafu vyčteme: Pavel cestou do Lhoty potkal vracejícího se Petra v čase 23 min ve vzdálenosti 3,4 km od Lhoty a poté ho v čase 55 min ve vzdálenosti 750 m před Lhotou předběhl. **2 body**

2. a) K sestrojení grafu je nutné dopočítat doby brzdění. Doba brzdění Octavie je

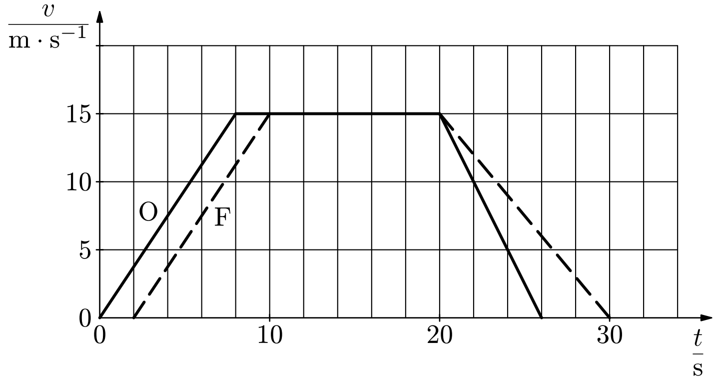
$$\Delta t_{\mathrm{O}} = \frac{v}{a_{\mathrm{O}}} = \frac{15\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}}{2{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}} = 6\ \mathrm{s}.$$

Oba automobily urazily při rozjíždění stejnou dráhu, při rovnoměrném pohybu se však Felicie pohybovala o 2 s kratší dobu, čímž získala delší dráhu pro zastavení o $15\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \cdot 2\ \mathrm{s} = 30\ \mathrm{m}$. Brzdná dráha Octavie je

$$s_{\mathrm{O}} = \frac{1}{2}a_{\mathrm{O}}(\Delta t_{\mathrm{O}})^2 = \frac{1}{2}v\Delta t_{\mathrm{O}} = \frac{1}{2} \cdot 15\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \cdot 6\ \mathrm{s} = 45\ \mathrm{m}.$$

Brzdná dráha Felicie je tedy $45\ \mathrm{m} + 30\ \mathrm{m} = 75\ \mathrm{m}$. Její dobu brzdění určíme ze vzorce $s_{\mathrm{F}} = \frac{1}{2}v\Delta t_{\mathrm{F}}$:

$$\Delta t_{\mathrm{F}} = \frac{2s_{\mathrm{F}}}{v} = \frac{2 \cdot 75\ \mathrm{m}}{15\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}} = 10\ \mathrm{s}.$$



6 bodů

b) Dráhu uraženou mezi křižovatkami určíme jako celkový obsah plochy pod grafem jednoho nebo druhého automobilu. Např. pro Oktávii vychází

$$s = \frac{15 \cdot 8}{2}\ \mathrm{m} + 15 \cdot (20 - 8)\ \mathrm{m} + \frac{15 \cdot (26 - 20)}{2}\ \mathrm{m} = 285\ \mathrm{m}.$$

Vzdálenost mezi vozidly při rovnoměrném pohybu určíme jako rozdíl obsahů ploch např. v čase 10 s, kdy se již oba automobily pohybovaly stejnou rychlostí. Tento rozdíl obsahů je roven obsahu rovnoběžníku:

$$d = 2 \cdot 15 \text{ m} = 30 \text{ m}.$$

Velikost zrychlení Felicie při rozjíždění

$$a_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{15 - 0}{10 - 2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 1{,}88 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

a při brzdění

$$a_2 = \frac{|\Delta v|}{\Delta t} = \frac{15 - 0}{30 - 20} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 1{,}5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

4 body

3. a) Z rovnic pro rovnoměrně zpomalený pohyb

$$s = \frac{1}{2}at_1^2, \qquad v_{01} = at_1 \tag{1}$$

dostaneme velikost počáteční rychlosti $v_{01} = \frac{2s}{t_1} = 2{,}24 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. **2 body**

b) Oba kameny se pohybovaly se stejným zrychlením, jeho velikost získáme z rovnic (1):

$$a = \frac{2s}{t_1^2}. \tag{2}$$

Dosazením do vzorce pro dráhu druhého kamene $s = v_{02}t_2 - \frac{1}{2}at_2^2$ dostaneme $s = v_{02}t_2 - \frac{st_2^2}{t_1^2}$.
Z rovnice vyjádříme hledanou velikost počáteční rychlosti

$$v_{02} = s\left(\frac{1}{t_2} + \frac{t_2}{t_1^2}\right). \tag{3}$$

Číselně vychází $v_{02} = 3{,}25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Hledaná velikost konečné rychlosti bezprostředně před nárazem je dána vzorcem

$$v_2 = v_{02} - at_2.$$

Dosazením vztahů (2) a (3) po úpravě dostaneme

$$v_2 = s\left(\frac{1}{t_2} - \frac{t_2}{t_1^2}\right).$$

Číselně vychází $v_2 = 2{,}35 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ **6 bodů**

c) Označme m hmotnost kamene a $F_\mathrm{t} = ma$ velikost třecí síly působící na kámen. Pak platí

$$f = \frac{F_\mathrm{t}}{F_G} = \frac{ma}{mg} = \frac{a}{g}.$$

Dosazením vztahu (2) dostaneme $f = \dfrac{2s}{gt_1^2}$.

Číselně vychází $f = 0{,}009\,1$. **2 body**

4. a) Označme v rychlost soupravy bezprostředně po srážce. Ze zákona zachování hybnosti

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)v$$

plyne

$$v = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1. \tag{1}$$

Třecí síla působící během brzdění na druhý vagón spotřebuje práci, která je rovna kinetické energii soupravy bezprostředně po srážce:

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = f m_2 g s.$$

Po dosazení vztahu (1) a po úpravě dostaneme

$$s = \frac{m_1^2 v_1^2}{2 f m_2 (m_1 + m_2) g}.$$

Číselně vychází $s = 1{,}6$ m. **6 bodů**

b) Souprava o hmotnosti $m_1 + m_2$ se působením brzdící síly o velikosti $f m_2 g$ pohybuje podle 2. pohybového zákona se zrychlením o velikosti

$$a = \frac{f m_2 g}{m_1 + m_2}.$$

Druhý vagón působí na první vagón o hmotnosti m_1 silou o velikosti

$$F_1 = m_1 a = \frac{f m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}.$$

Podle zákona akce a reakce je velikost síly $\boldsymbol{F}_2$, kterou působí první vagón na druhý, stejná jako velikost síly $\boldsymbol{F}_1$, kterou působí druhý vagón na první. Číselně vychází $F_1 = F_2 = 21{,}5$ kN. **4 body**

Poznámka: Velikost síly $\boldsymbol{F}_2$ je možné též získat z 2. pohybového zákona. Druhý vagón se pohybuje se stejným zrychlením $\boldsymbol{a}$, jehož příčinou je výslednice brzdící síly o velikosti fm_2g a tlačné síly prvního vagónu o velikosti F_2:

$$m_2a = fm_2g - F_2.$$

Pro sílu, kterou působí první vagón na druhý, tak platí:

$$F_2 = fm_2g - m_2a = fm_2g - m_2\frac{fm_2g}{m_1+m_2} =$$
$$= \frac{f(m_1+m_2)m_2g - fm_2^2g}{m_1+m_2} = \frac{fm_1m_2g}{m_1+m_2}.$$

5. V řešení jsou síly popisovány z hlediska pozorovatele ve vztažné soustavě spojené s autíčkem.

a) Velikost rychlosti rovnoměrného pohybu autíčka je

$$v = \frac{2\pi r}{t_0}. \tag{1}$$

V nejvyšším bodě trajektorie má setrvačná odstředivá síla směr opačný vzhledem k tíhové síle. Podle zadání autíčko smyčkou projelo bez odpoutání od smyčky, proto výslednice obou sil směřuje vzhůru. Její velikost je

$$F_1 = \frac{mv^2}{r} - mg.$$

Po dosazení vztahu (1) dostaneme $F_1 = m\left(\frac{4\pi^2 r}{t_0^2} - g\right) = 0{,}62\ \mathrm{N}.$

2 body

b) Tíhová síla je kolmá k přítlačné síle, autíčko je přitlačováno pouze setrvačnou odstředivou silou o velikosti

$$F_2 = \frac{mv^2}{r}.$$

Po dosazení vztahu (1) dostaneme $F_2 = \frac{4\pi^2 rm}{t_0^2} = 2{,}6\ \mathrm{N}.$

2 body

c) Za dobu t_1 opíše průvodič těžiště autíčka úhel (obr. R1)

$$\alpha = \omega t_1 = 2\pi\frac{t_1}{t_0} = 1{,}17\ \mathrm{rad} = 67^\circ. \tag{2}$$

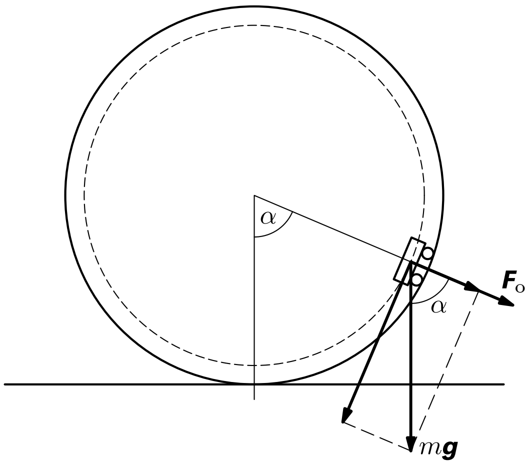
Tíhovou sílu rozložíme do tečného a normálového směru. Přítlačná síla je složena ze setrvačné odstředivé síly a normálové složky tíhové síly. Pro vypočtený ostrý úhel mají shodný směr, jejich velikosti sečteme:

$$F_3 = \frac{mv^2}{r} + mg\cos\alpha.$$

Po dosazení vztahů (1) a (2) dostaneme

$$F_3 = m\left[\frac{4\pi^2 r}{t_0^2} + g\cos\left(2\pi\frac{t_1}{t_0}\right)\right] = 3{,}3\ \mathrm{N}.$$

2 body



Obr. R1

d) Průměrný výkon je poměr získané potenciální energie a odpovídající doby:

$$P = \frac{mg \cdot 2r}{\frac{t_0}{2}} = \frac{4mgr}{t_0} = 1{,}8\ \mathrm{W}.$$

2 body

e) Výkon je maximální v okamžiku, kdy autíčko stoupá svisle vzhůru, tj. kdy velikost tahové síly je rovna velikosti tíhové síly:

$$P_\mathrm{max} = mgv.$$

Po dosazení vztahu (1) dostaneme

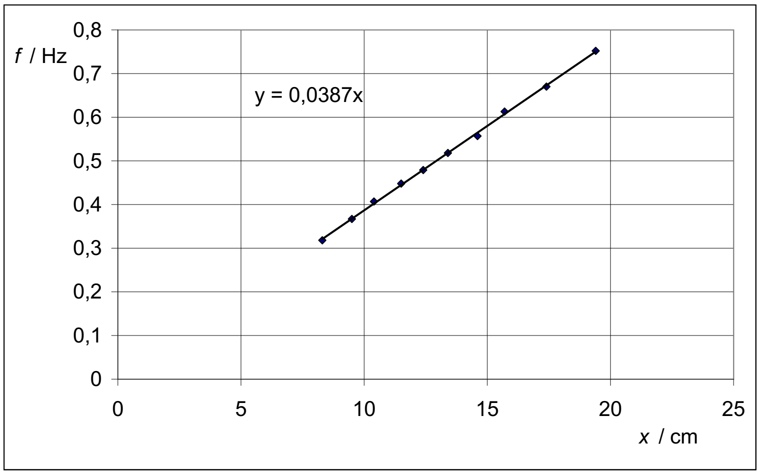
$$P_\mathrm{max} = \frac{2\pi mgr}{t_0} = 2{,}8\ \mathrm{W}.$$

2 body

6. Výsledky měření pro délku závitové tyče $d = 19{,}4$ cm a délku vláken přibližně 135 cm.

Číslo měření	$\frac{x}{\text{cm}}$	$\frac{10T_1}{\text{s}}$	$\frac{10T_2}{\text{s}}$	$\frac{\overline{T}}{\text{s}}$	$\frac{f}{\text{Hz}}$
1	19,4	13,29	13,30	1,330	0,752
2	17,4	14,85	15,01	1,493	0,670
3	15,7	16,33	16,28	1,631	0,613
4	14,6	17,92	17,98	1,795	0,557
5	13,4	19,37	19,27	1,932	0,518
6	12,4	21,00	20,78	2,089	0,479
7	11,5	22,28	22,33	2,231	0,448
8	10,4	24,69	24,50	2,460	0,407
9	9,5	27,33	27,14	2,724	0,367
10	8,3	31,51	31,44	3,148	0,318

Graf je sestrojen v Excelu. Typ spojnice trendu zvolen lineární a směřující do počátku. Zobrazena rovnice přímé úměrnosti $f = 0{,}0387\ \text{Hz} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot x$.

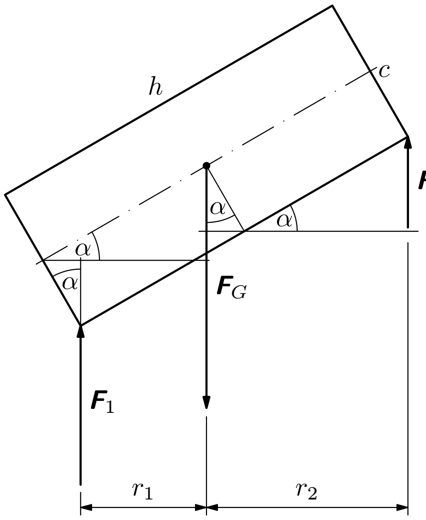


Závěr: Frekvence rotačních kmitů vodorovné tyče zavěšené souměrně na dvou rovnoběžných vláknech je přímo úměrná jejich vzájemné vzdálenosti.

7. a) Hmotnost skříně je $m = [clh - (c - 2t) \cdot (l - 2t) \cdot (h - 2t)]\varrho = 66$ kg.

1 bod

b) Síly, kterými musí nosiči působit na skříň, jsou znázorněny na obr. R2.



Obr. R2

Podle obr. R2 platí $r_1 = \dfrac{h}{2}\cos\alpha - \dfrac{c}{2}\sin\alpha$, $r_2 = \dfrac{h}{2}\cos\alpha + \dfrac{c}{2}\sin\alpha$.
Dále pak platí podmínka rovnováhy $F_1 r_1 = F_2 r_2$,
z čehož $\dfrac{F_1}{F_2} = \dfrac{r_2}{r_1} = \dfrac{h\cos\alpha + c\sin\alpha}{h\cos\alpha - c\sin\alpha} = 1{,}81$.
Použitím vztahu $F_{\mathrm{G}} = F_1 + F_2 = 646$ N dostáváme, že $F_1 = 416$ N, $F_2 = 230$ N.

5 bodů

c) Podle zadání by mělo platit $F_1 = 2F_2$, z čehož také platí, že $2r_1 = r_2$. Po dosazení za r_1 a r_2 z úlohy b) dostaneme rovnici
$h\cos\alpha - c\sin\alpha = \dfrac{h}{2}\cos\alpha + \dfrac{c}{2}\sin\alpha$,
z čehož $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{3}\dfrac{h}{c} = \dfrac{2}{3}$, tj. $\alpha = 34°$. **4 body**