Řešení úloh krajského kola 52. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie C

Autoři úloh: M. Jarešová (1, 4), J. Jírů (2), P. Šedivý (3)

1. a) Podle Archimédova zákona platí pro téměř ponořenou zkumavku

$$F_{vz} = V\varrho g = (V_s + V_0)\varrho g = F_G = (M + m_1)g,$$

kde $m_1 = m + \Delta m = \left(1 + \frac{12}{15}\right) m = \frac{27}{15} m = \frac{9}{5} m$ je hmotnost všech kuliček ve zkumavce. Pak

$$V_s = \frac{M + m_1}{\varrho} - V_0 = \frac{M + \frac{9}{5} m}{\varrho} - V_0 = \frac{5M + 9m - 5V_0\varrho}{5\varrho} = \frac{M}{\varrho_s},$$

$$\varrho_s = \frac{5M\varrho}{5M + 9m - 5V_0\varrho}.$$

Pro dané hodnoty:

$$\varrho_s = \frac{5 \cdot 0{,}013 \cdot 1\,000}{5 \cdot 0{,}013 + 9 \cdot 0{,}009 - 5 \cdot 25 \cdot 10^{-6} \cdot 1\,000}\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}} = 3\,100\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}.$$

$$V_s = \frac{5 \cdot 0{,}013 + 9 \cdot 0{,}009 - 5 \cdot 25 \cdot 10^{-6} \cdot 1\,000}{5 \cdot 1\,000}\ \mathrm{m^3} = 4{,}2\ \mathrm{cm^3}.$$

4 body

b) Po ponoření zkumavky s 15 kuličkami do kádinky stoupla hladina vody v kádince do výšky h_1, kterou určíme ze vztahu

$$F_{vz1} = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} \cdot h_1 \cdot \varrho \cdot g = F_{G1} = (M + m)g.$$

Z toho $h_1 = \frac{4(M + m)}{\pi(D^2 - d^2)\varrho}$.

Po přidání dalších 12 kuliček o celkové hmotnosti Δm stoupla hladina vody v kádince do výšky h_2 oproti stavu, kdy byla zkumavka celá nad vodou. Obdobně jako v předchozím případě platí $h_2 = \frac{4(M + m + \Delta m)}{\pi(D^2 - d^2)\varrho}$.

Hladina vody v kádince tedy po přidání 12 kuliček tedy stoupla o

$$\Delta h = h_2 - h_1 = \frac{4\Delta m}{\pi(D^2 - d^2)\varrho} = \frac{16m}{5\pi(D^2 - d^2)\varrho}.$$

Pro dané hodnoty je $\Delta h = \frac{16 \cdot 0{,}009}{5\pi \cdot (0{,}09^2 - 0{,}016^2) \cdot 1\,000}\ \mathrm{m} = 1{,}2\ \mathrm{mm}$.

3 body

c) Označme m_2 hmotnost kuliček, které musí být ve zkumavce, aby byla ponořena $\frac{4}{5}$ svého objemu. Pak

$$\frac{4}{5}(M + m_1) = \frac{4}{5}\left(M + \frac{9}{5}m\right) = M + m_2 = M + N \cdot \frac{m}{15},$$

z čehož $N = \dfrac{108m - 15M}{5m} = \dfrac{108 \cdot 9 - 15 \cdot 13}{5 \cdot 9} = 17.$

3 body

2. a) Z rovnic $a = \dfrac{v_1 - v_0}{t_1}$, $\qquad s = v_0 t_1 + \dfrac{1}{2} a t_1^2$

dostaneme $s = \dfrac{v_1 + v_0}{2} t_1 = 152$ m.

Výkon při rovnoměrně zrychleném pohybu je $P = Fv$ přímo úměrný rychlosti, kde $F = ma = m\dfrac{v_1 - v_0}{t_1}$ je konstantní tahová síla. Dosazením dostaneme

$$P_{\min} = Fv_0 = m\frac{v_1 - v_0}{t_1} v_0 = 27{,}0 \text{ kW},$$

$$P_{\min} = Fv_1 = m\frac{v_1 - v_0}{t_1} v_1 = 75{,}6 \text{ kW}.$$

4 body

b) Z rovnice $Pt_1 = \dfrac{1}{2} m v_1^2 - \dfrac{1}{2} m v_0^2$

dostaneme výkon druhého automobilu $P = \dfrac{m(v_1^2 - v_0^2)}{2t_1} = 51{,}3$ kW.

Zrychlení a' druhého automobilu není konstantní. Zpočátku je větší a na konci časového intervalu menší než zrychlení a prvního automobilu. Platí

$$P = Fv = ma'v = \frac{m(v_1^2 - v_0^2)}{2t_1} \quad \Rightarrow \quad a' = \frac{(v_1^2 - v_0^2)}{2t_1 v}.$$

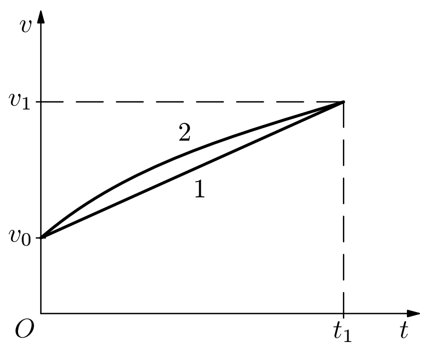
Na počátku je $a_0' = \dfrac{(v_1^2 - v_0^2)}{2t_1 v_0} = \dfrac{v_1 - v_0}{t_1} \cdot \dfrac{v_1 + v_0}{2v_0} = 1{,}9a = 4{,}3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$,

na konci je $a_1' = \dfrac{(v_1^2 - v_0^2)}{2t_1 v_1} = \dfrac{v_1 - v_0}{t_1} \cdot \dfrac{v_1 + v_0}{2v_1} \doteq 0{,}68a = 1{,}5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

4 body

c) Z grafu rychlosti (obr. R1) je zřejmé, že dráha uražená druhým automobilem v daném časovém intervalu je větší.

2 body



Obr. R1

Poznámka: Dráhu druhého automobilu lze vypočítat integrálním počtem:

$$s = \int_0^{t_1} \sqrt{v_0^2 + \frac{v_1^2 - v_0^2}{t_1} t} \, \mathrm{d}t = \frac{2}{3} \frac{v_1^2 + v_1 v_2 + v_2^2}{v_1 + v_0} t_1 = 163 \text{ m}.$$

3. Elektrická práce topné spirály $W_{\mathrm{el}} = \dfrac{U^2\tau}{R}$ se spotřebuje na teplo potřebné k ohřátí ledu na teplotu tání $t_{\mathrm{t}} = 0\ {}^\circ\mathrm{C}$

$$Q_1 = (K + mc_1)(t_{\mathrm{t}} - t_1) = 1{,}492 \cdot 10^4\ \mathrm{J}\,,$$

skupenské teplo tání ledu $L_{\mathrm{t}} = ml_{\mathrm{t}} = 2{,}822 \cdot 10^5\ \mathrm{J}$

a teplo potřebné k ohřátí vody na výslednou teplotu

$$Q_2 = (K + mc_2)(t_2 - t_{\mathrm{t}}) = 9{,}125 \cdot 10^4\ \mathrm{J}\,.$$

Příkon topného tělíska je $P = \dfrac{Q_1 + L_{\mathrm{t}} + Q_2}{\tau} = 143{,}84\ \mathrm{W} \doteq 144\ \mathrm{W}$ **4 body**

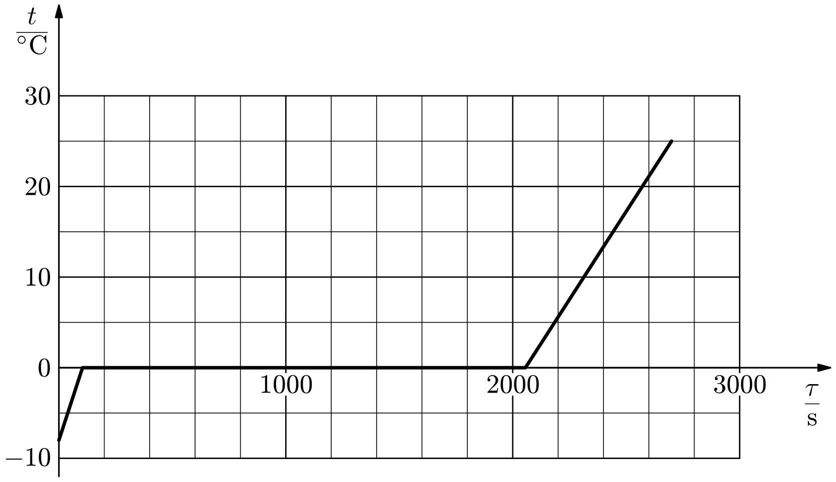
a odpor tělíska $R = \dfrac{U^2}{P} \doteq 6{,}3\ \Omega$. **2 body**

Doby trvání jednotlivých částí děje jsou

$$\tau_1 = \frac{Q_1}{P} \doteq 104\ \mathrm{s}\,, \qquad \tau_2 = \frac{L_{\mathrm{t}}}{P} \doteq 1\,962\ \mathrm{s}\,, \qquad \tau_3 = \frac{Q_2}{P} \doteq 634\ \mathrm{s}\,.$$

2 body

Časový průběh celého děje zobrazuje graf na obr. R2. **2 body**



Obr. R2

4. a) Na začátku pohybu mají obě koule nulovou kinetickou a stejně velkou polohovou energii. Ze zákona o zachování mechanické energie vyplývá, že obě koule musí mít po dosažení spodního konce také stejnou energii kinetickou. Poměr kinetických energií koulí na konci nakloněné roviny je tudíž roven jedné.

1 bod

b) Kinetická energie plné koule je dána vztahem

$$E_{\mathrm{k1}} = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}J_{01}\omega^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mr^2\cdot\frac{v_1^2}{r^2} = \frac{7}{10}mv_1^2.$$

Kinetická energie tenkostěnné koule je dána vztahem

$$E_{\mathrm{k2}} = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}J_{02}\omega^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}mr^2\cdot\frac{v_2^2}{r^2} = \frac{5}{6}mv_2^2.$$

Z rovnosti $E_{\mathrm{k1}} = E_{\mathrm{k2}}$ dostaneme $\frac{7}{10}mv_1^2 = \frac{5}{6}mv_2^2$, z čehož $\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{25}{21}}$.

Z výše uvedených vztahů v části a) také vyplývá $v_1 = \sqrt{\frac{10}{7}gh} = 3{,}7\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $v_2 = \sqrt{\frac{6}{5}gh} = 3{,}4\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

3 body

c) Obě koule musí při svém pohybu urazit dráhu $s = \frac{h}{\sin\alpha} = \frac{v_1^2}{2a_1} = \frac{v_2^2}{2a_2}$. Z rovnosti $\frac{v_1^2}{2a_1} = \frac{v_2^2}{2a_2}$ dostaneme $\frac{a_1}{a_2} = \frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{\frac{10}{7}gh}{\frac{6}{5}gh} = \frac{25}{21}$. Z rovnosti $\frac{h}{\sin\alpha} = \frac{v_1^2}{2a_1}$ dostaneme $a_1 = \frac{v_1^2\sin\alpha}{2h} = \frac{\frac{10}{7}gh\sin\alpha}{2h} = \frac{5}{7}g\sin\alpha = 3{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Analogicky z rovnosti $\frac{h}{\sin\alpha} = \frac{v_2^2}{2a_2}$ dostaneme $a_2 = \frac{v_2^2\sin\alpha}{2h} = \frac{\frac{6}{5}gh\sin\alpha}{2h} = \frac{3}{5}g\sin\alpha = 2{,}9\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

3 body

Poznámka

K týmž výsledkům je možno dospět také užitím vztahu $a = \dfrac{g\sin\alpha}{1+\frac{J_0}{mr^2}}$ postupným dosazením za momenty setrvačnosti.

d) Pro dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu 1. koule s nulovou počáteční rychlostí platí vztah $s = \frac{1}{2}at^2$, z čehož $t = \sqrt{\frac{2s}{a_1}}$. Aby obě koule dorazily na spodní konec nakloněné roviny současně, musíme druhé kouli udělit počáteční rychlost o velikosti v_{02}. Platí $s = v_{02}t + \frac{1}{2}a_2t^2$. Po dosazení za t dostaneme $s = v_{02} \cdot \sqrt{\frac{2s}{a_1}} + \frac{1}{2}a_2 \cdot \frac{2s}{a_1}$, z čehož

$$s - \frac{a_2}{a_1}s = v_{02} \cdot \sqrt{\frac{2s}{a_1}}.$$

Postupným dosazením za a_1, a_2 a $s = \frac{h}{\sin\alpha}$ dostaneme

$$v_{02} = \frac{4}{25}\sqrt{\frac{5}{14}hg} = 0{,}30\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

3 body