**Řešení úloh 1. kola 52. ročníku fyzikální olympiády.** *Kategorie B*

Autoři úloh: M. Jarešová (5), P. Šedivý (1, 4), J. Thomas (2, 3, 7),
K. Rauner a P. Šedivý (6).

**1.** a) Protože se tyč otáčí velmi pomalu, můžeme každou její polohu považovat za rovnovážnou. Moment tíhové síly vzhledem k ose otáčení

$$M_1 = Sl\varrho g \cdot \frac{l}{2}\sin\alpha$$

je v rovnováze s momentem vztlakové síly

$$M_2 = -S\left(l - \frac{x}{\cos\alpha}\right)\varrho_\mathrm{k} g \cdot \frac{\left(l + \frac{x}{\cos\alpha}\right)}{2}\sin\alpha = -S\varrho_\mathrm{k} g \frac{l^2 - \frac{x^2}{\cos^2\alpha}}{2}\sin\alpha.$$

Dokud je tyč nakloněna, je $\sin\alpha > 0$. Z rovnice $M_1 + M_2 = 0$ po dosazení a úpravě dostaneme

$$\varrho_\mathrm{k}\frac{x^2}{\cos^2\alpha} = l^2(\varrho_\mathrm{k} - \varrho).$$

Z toho

$$\cos\alpha = \frac{x}{l}\sqrt{\frac{\varrho_\mathrm{k}}{\varrho_\mathrm{k} - \varrho}}, \qquad \alpha = \arccos\left(\frac{x}{l}\sqrt{\frac{\varrho_\mathrm{k}}{\varrho_\mathrm{k} - \varrho}}\right).$$

Pro dané hodnoty

$$\cos\alpha = \frac{x}{0{,}8\ \mathrm{m}}\sqrt{5}.$$

Tento výsledek vyhovuje úloze, pokud

$$\frac{x}{l}\sqrt{\frac{\varrho_\mathrm{k}}{\varrho_\mathrm{k} - \varrho}} \leq 1,$$

tedy, pokud vzdálenost $x$ nepřekročí hodnotu

$$x_0 = l\sqrt{1 - \frac{\varrho}{\varrho_\mathrm{k}}}.$$

Pro dané hodnoty je $x_0 = 0{,}358$ m.
Po překročení této hodnoty je rovnice $M_1 + M_2 = 0$ splněna jen pro $\sin\alpha = 0$. Tyč se ustálí ve svislé rovnovážné poloze.

**4 body**

b) Tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$, vztlaková síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{v}$ a síla $\boldsymbol{F}$, kterou na tyč působí osa, jsou v rovnováze. Platí $\boldsymbol{F}_G + \boldsymbol{F}_\mathrm{v} + \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$. Protože první dvě mají svislý směr, musí i síla od osy být svislá. Podle principu akce a reakce působí tyč na osu silou $-\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_G + \boldsymbol{F}_\mathrm{v}$, která má velikost $F = F_G - F_\mathrm{v}$.

Pokud je $x < x_0$, je délka ponořené části tyče konstantní

$$l - \frac{x}{\cos\alpha} = l - l\sqrt{1 - \frac{\varrho}{\varrho_k}} = l - x_0 = \text{konst.}$$

Proto i síla, kterou působí tyč na osu, má konstantní velikost

$$F = Sl\varrho g - S(l - x_0)\varrho_k g = Slg\left[\sqrt{\varrho_k(\varrho_k - \varrho)} - (\varrho_k - \varrho)\right].$$

Pro dané hodnoty $F = 0{,}194$ N.
Po překročení hodnoty $x_0$ se délka ponořené části a s tím i velikost vztlakové síly zmenšuje. Platí

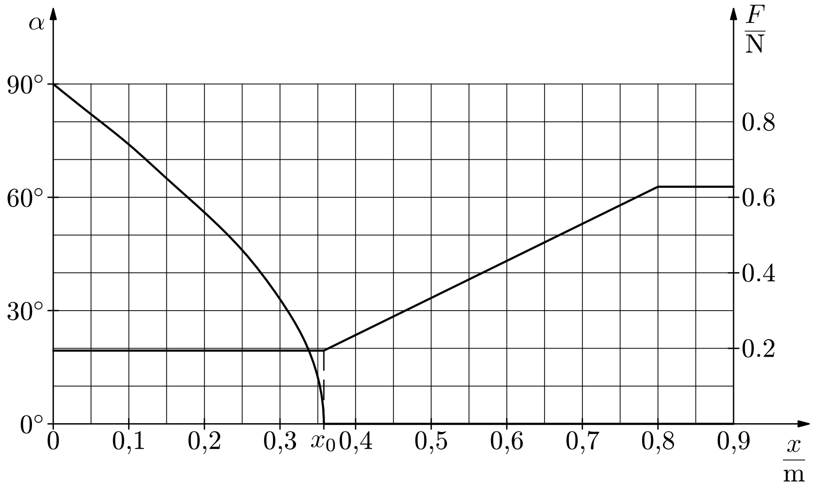
$$F = Sl\varrho g - S(l - x)\varrho_k g = Sg\left[x\varrho_k - l(\varrho_k - \varrho)\right].$$

Velikost síly, kterou tyč působí na osu, se v závislosti na $x$ lineárně zvětšuje, až pro $x = l$ vztlaková síla zanikne a na osu působí jen tíha tyče o velikosti $F_G = Sl\varrho g$. Pro dané hodnoty $F_G = 0{,}628$ N. **4 body**

Pro sestrojení grafu závislosti $\alpha$ na $x$ v intervalu $\langle 0, x_0\rangle$ můžeme použít tabulku:

| $x$/m | 0 | 0,05 | 0,10 | 0,15 | 0,20 | 0,25 | 0,30 | 0,33 | 0,358 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\cos\alpha$ | 0,000 | 0,140 | 0,280 | 0,419 | 0,559 | 0,699 | 0,839 | 0,922 | 1,000 |
| $\alpha$ | 90° | 82° | 74° | 65° | 56° | 46° | 33° | 23° | 0° |

Graf závislosti $F$ na $x$ je dostatečně určen hodnotami $F = 0{,}194$ N pro $x \le x_0$ a $F = 0{,}628$ N pro $x \ge l$.



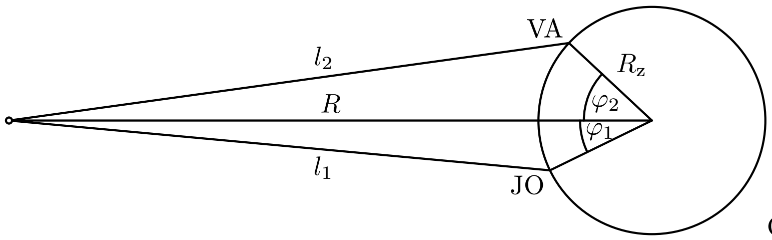

**2 body**

**2.** a) Stacionární družice musí obíhat nad rovníkem. Dostředivou silou působící na satelit je gravitační síla, proto

$$\varkappa \frac{mM_z}{R^2} = \frac{m4\pi^2 R}{T^2} \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt[3]{\frac{\varkappa M_z T^2}{4\pi^2}} \approx 42\,200 \text{ km.}$$

**1 bod**

b) Užitím kosinové věty určíme vzdálenosti $l_1$ a $l_2$ družice od místa vysílání a příjmu (obr. R1):



Obr. R1

$$l_1^2 = R^2 + R_z^2 - 2R_z R\cos\varphi_1 \quad \Rightarrow \quad l_1 = 36\,600 \text{ km},$$
$$l_2^2 = R^2 + R_z^2 - 2R_z R\cos\varphi_2 \quad \Rightarrow \quad l_2 = 37\,800 \text{ km},$$

Doba přenosu signálu $t_1 = \dfrac{l_1 + l_2}{c} = 0{,}25$ s.

**3 body**

c) Délka oblouku Johannesburg–Varna je

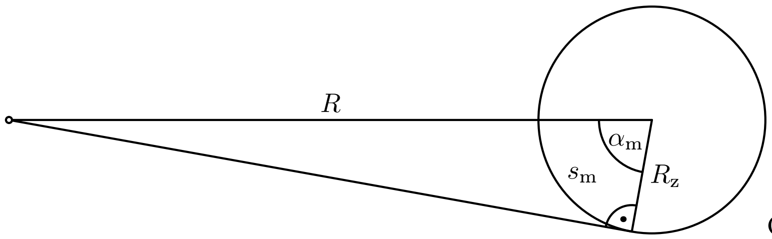
$$l = R_z(\varphi_2 + \varphi_1) = R_z \cdot 1{,}20 \text{ rad} = 7\,670 \text{ km.}$$

Tuto vzdálenost urazí rádiové vlny za dobu $t_2 = l/c = 0{,}026$ s.

**2 body**

d) Družice musí být z místa příjmu viditelná. Tomu podle obr. R2 odpovídá mezní hodnota středového úhlu $\alpha_m$ a mezní vzdálenost $s_m$:

$$\alpha_m = \arccos\frac{R_z}{R} = 81{,}3^\circ = 1{,}42 \text{ rad}, \qquad s_m = R_z\alpha_m = 9\,000 \text{ km.}$$



Obr. R2

$s_1 = 12\,300\ \text{km} > s_\text{m} \quad \Rightarrow \quad$ z Melbourne družice nebude viditelná,
$s_2 = 8\,100\ \text{km} < s_\text{m} \quad \Rightarrow \quad$ z Ria družice viditelná bude.

**2 body**

e) Protože se družice nenachází nad poledníkem, na kterém leží Rio, musíme ze vzdálenosti $s_2$ nejprve vypočítat středový úhel $\alpha$ a pak pomocí kosinové věty vzdálenost $l_3$ Ria od družice:

$$\alpha = \frac{s_2}{R_\text{z}} = 1{,}27\ \text{rad} = 72{,}7^\circ,$$

$$l_3^2 = R^2 + R_\text{z}^2 - 2R_\text{z}R\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad l_3 = 42\,700\ \text{km},$$

Doba potřebná k přenosu signálu je $t_3 = (l_1 + l_3)/c = 0{,}26\ \text{s}$.

**2 body**

*Poznámka:* Úhel $\alpha$ v části e) lze nalézt bez znalosti vzdálenosti $s$ pomocí vzorce sférické geometrie:

$$\cos\alpha = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\Delta\lambda,$$

kde $\varphi_1$ a $\varphi_2$ jsou zeměpisné šířky míst a $\Delta\lambda$ je rozdíl zeměpisných délek těchto míst.

**3.** a,b,c) Označme $\alpha$ okamžitou odchylku spojnice tělíska se středem kulové plochy od počátečního směru (obr. R3). Na tělísko působí tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$, jejíž složky mají velikosti

$$F_1 = mg\cos\alpha, \qquad F_2 = mg\sin\alpha,$$

a reakce kulové plochy $\boldsymbol{N}$. Výslednice $\boldsymbol{F}$ těchto sil má tečnou složku $\boldsymbol{F}_1$, a normálovou složku $\boldsymbol{F}_\mathrm{d} = \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}_2$, která se uplatňuje jako síla dostředivá. Ze zákona zachování energie odvodíme

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgR\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gR\sin\alpha}.$$

Pak

$$F_\mathrm{d} = \frac{mv^2}{R} = 2mg\sin\alpha = N - F_2, \qquad N = F_\mathrm{d} + F_2 = 3mg\sin\alpha.$$

Výsledná síla a celkové zrychlení tělíska mají velikosti

$$F = \sqrt{F_\mathrm{d}^2 + F_1^2} = mg\sqrt{4\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = mg\sqrt{3\sin^2\alpha + 1},$$

$$a = \frac{F}{m} = g\sqrt{3\sin^2\alpha + 1}.$$

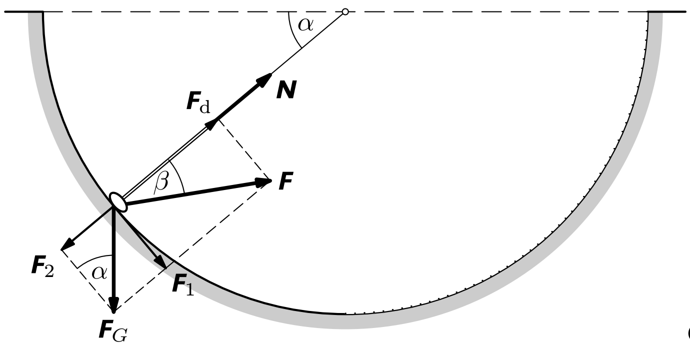
Pro úhel $\beta$, který svírá výsledná síla a tedy i zrychlení tělíska se spojnicí tělíska se středem kulové plochy, platí

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{F_1}{F_\mathrm{d}} = \frac{mg\cos\alpha}{2mg\sin\alpha} = \frac{1}{2\operatorname{tg}\alpha}.$$

**4 body**

Číselně
a) $\alpha = 30°$, $a = 13{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $\beta = 40{,}9°$,
b) $\alpha = 60°$, $a = 17{,}7\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $\beta = 16{,}1°$,
c) $\alpha = 90°$, $a = 2g = 19{,}6\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $\beta = 0°$.

**2 body**




Obr. R3

d) Bezprostředně po přechodu na zdrsněný povrch je výsledná síla výslednicí dostředivé síly, která zde má velikost $F_\mathrm{d} = 2mg$, a síly tření, která má velikost

$$F_\mathrm{t} = fN = 3fmg$$

a směr proti pohybu tělesa (obr. R4). Výsledná síla a zrychlení tělesa mají velikosti

$$F = \sqrt{(2mg)^2 + (3fmg)^2} = mg\sqrt{4 + 9f^2}, \qquad a = g\sqrt{4 + 9f^2}$$

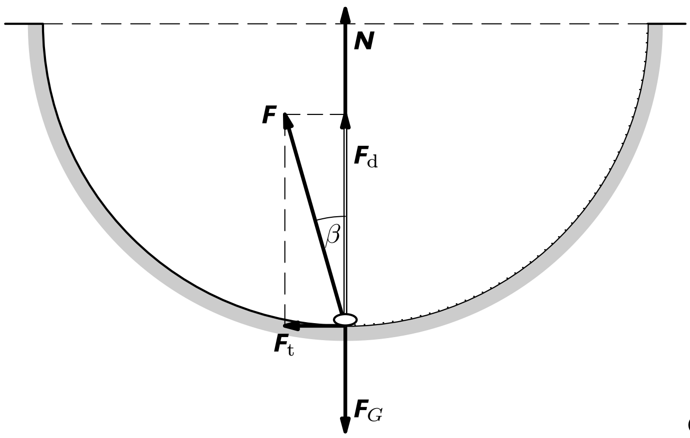
a pro úhel $\beta$, který svírají se svislým směrem, platí

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{F_\mathrm{t}}{F_\mathrm{d}} = \frac{3fmg}{2mg} = \frac{3}{2}f.$$

**3 body**

Pro dané hodnoty vychází $a = 20{,}1\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, $\beta = 12{,}7°$.

**1 bod**




Obr. R4

**4.** a) Nejprve určíme polohu těžiště desky. Čárkovaná kružnice na obr. R5 rozděluje desku na kruh o obsah $\pi r^2/4$ a zbytek o obsahu $\pi r^2/2$. Těžiště tedy rozděluje úsečku $SS_1'$ v poměru $1:2$ a nachází se ve vzdálenosti $r/6$ od bodu $S$. **2 body**

Jestliže jsou nohy stolu stejně zatíženy, působí každá z nich reakcí o velikosti $F_G/3$. Výslednice reakcí působících v bodech $B$ a $C$ má velikost $2F_G/3$ a její působiště $P$ leží uprostřed úsečky $BC$ a současně i na přímce $AT$, přičemž $|PT| : |AT| = 1 : 2$. Proto

$$|PS| = |PT| - |ST| = \frac{5r}{12} - \frac{r}{6} = \frac{r}{4}.$$

Nohy musíme umístit do bodů $B$ a $C$, které mají $x$-ovou souřadnici 0,25$r$.

**3 body**

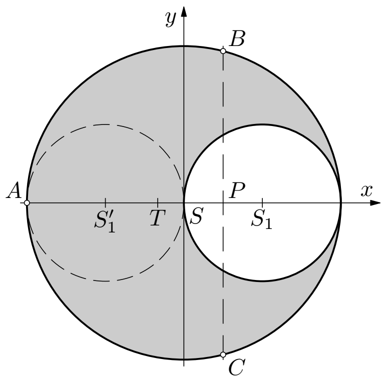
b) Stabilita stolu závisí na vzdálenostech těžiště od stran trojúhelníka $ABC$. Posouváme-li spojnici $BC$ doprava, její vzdálenost od těžiště se zvětšuje a současně se zmenšují vzdálenosti přímek $AB$ a $AC$ od těžiště. Optimální je, když úhel $\alpha$ na obr. R6 má takovou velikost, že všechny tři vzdálenosti jsou stejné. To vede k rovnici

$$\frac{5r}{6}\sin\alpha = \frac{r}{6} + r\cos 2\alpha = \frac{r}{6} + r - 2r\sin^2\alpha.$$

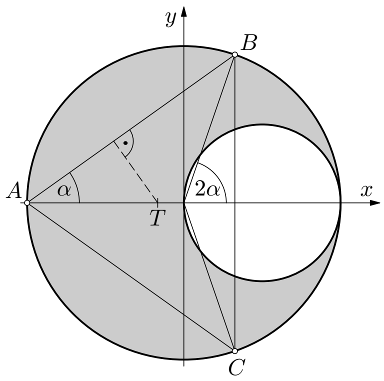
Po úpravě $\quad 12\sin^2\alpha + 5\sin\alpha - 7 = 0.$

Úloze vyhovuje kořen $\quad \sin\alpha = \dfrac{14}{24}, \qquad \alpha = 35{,}7^\circ.$

Nohy musíme umístit do bodů o $x$-ové souřadnici $r\cos 2\alpha = 0{,}32r$, tedy o něco dále od bodu $A$ než v úloze a). **5 bodů**




Obr. R5




Obr.R6

**5.** a) Pro doby kmitů kyvadel platí $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}$, $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}}$, z čehož $\frac{l_1}{l_2} = \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{1}{4}$. Rozdíl délek těchto kyvadel je $\Delta l = l_2 - l_1$, z čehož $l_2 = l_1 + \Delta l$. Po dosazení dostaneme $\frac{l_1}{l_1 + \Delta l} = \frac{1}{4}$, potom $l_1 = \frac{1}{3}\Delta l = 0{,}2$ m, $l_2 = \frac{4}{3}\Delta l = 0{,}8$ m. V dalším výpočtu použijeme vztah $g = a_{\mathrm{gZ}} = \frac{\varkappa M_{\mathrm{Z}}}{R_{\mathrm{Z}}^2}$. Doby kmitů těchto kyvadel pak jsou

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_1 R_{\mathrm{Z}}^2}{\varkappa M_{\mathrm{Z}}}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}2 \cdot (6\,370 \cdot 10^3)^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}} = 0{,}9 \text{ s},$$

$$T_2 = 2T_1 = 1{,}8 \text{ s}.$$

**5 bodů**

b) Při kmitání kyvadel na Marsu by dle zadání mělo platit $T_{1\mathrm{M}} = T_{1\mathrm{Z}}$. Potom $2\pi\sqrt{\frac{l_{1\mathrm{M}}}{a_{\mathrm{gM}}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_{1\mathrm{Z}}}{a_{\mathrm{gZ}}}}$, tj. $2\pi\sqrt{\frac{l_{1Z} R_{\mathrm{Z}}^2}{\varkappa M_{\mathrm{Z}}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_{1M} R_{\mathrm{M}}^2}{\varkappa M_{\mathrm{M}}}}$, z čehož $l_{1\mathrm{M}} = \frac{M_{\mathrm{M}}}{M_{\mathrm{Z}}} \cdot \left(\frac{R_{\mathrm{Z}}}{R_{\mathrm{M}}}\right)^2 \cdot l_{1\mathrm{Z}}$.

Číselně

$$l_{1\mathrm{M}} = 0{,}107\,4 \cdot \left(\frac{6370}{3400}\right)^2 \cdot\ 0{,}2 \text{ m} = 7{,}5 \text{ cm}.$$

Doba kmitu druhého kyvadla je pak dána vztahem

$$T_{2\mathrm{M}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_{1\mathrm{M}} + \Delta l}{a_{\mathrm{gM}}}} = 2\pi\sqrt{\frac{(l_{1\mathrm{M}} + \Delta l) R_{\mathrm{M}}^2}{\varkappa M_{\mathrm{M}}}}.$$

Číselně

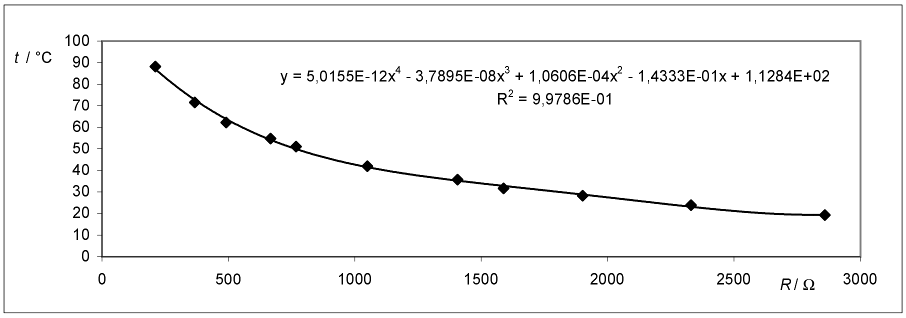
$$T_{2\mathrm{M}} = 2\pi\sqrt{\frac{67{,}5 \cdot 10^{-2} \cdot (3\,400 \cdot 10^3)^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 0{,}107\,4 \cdot 6 \cdot 10^{24}}} \text{ s} = 2{,}7 \text{ s}.$$

**5 bodů**

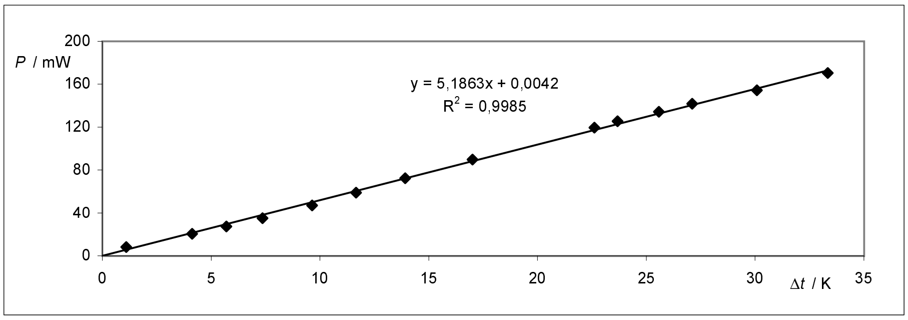
**6.** V následujících tabulkách a grafech zpracovaných EXCELem jsou zachyceny výsledky měření na termistoru NTC o jmenovitém odporu 2,2 kΩ s dovoleným příkonem 0,25 W. Regresní vzorec z prvního grafu, který vyjadřuje teplotu termistoru jako funkci jeho odporu, byl použit v posledním řádku druhé tabulky při určení rozdílu teploty termistoru a teploty okolí.

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t$ / °C | 88,2 | 71,5 | 62,2 | 54,8 | 51 | 42 | 35,7 | 31,7 | 28,3 | 23,9 | 19,3 |
| $R$ / Ω | 211 | 367 | 491 | 667 | 768 | 1050 | 1407 | 1589 | 1902 | 2330 | 2860 |

| |
|---|
| $t_o$ = 23 °C |
| $R_{25}$ = 2,2 kΩ |




| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $U$ / V | 2,61 | 4,29 | 6,45 | 7,24 | 7,91 | 8,67 | 9,23 | 9,68 | 10,02 | 10,33 | 10,38 | 10,39 | 10,4 | 10,3 | 10,33 |
| $I$ / mA | 1,113 | 1,902 | 3,18 | 3,79 | 4,44 | 5,41 | 6,37 | 7,48 | 8,95 | 11,56 | 12,08 | 12,93 | 13,64 | 16,55 | 14,95 |
| $P$ / mW | 2,90 | 8,16 | 20,5 | 27,4 | 35,1 | 46,9 | 58,8 | 72,4 | 89,7 | 119,4 | 125,4 | 134,3 | 141,9 | 170,5 | 154,4 |
| $R$ / Ω | 2345 | 2256 | 2028 | 1910 | 1782 | 1603 | 1449 | 1294 | 1120 | 894 | 859 | 804 | 762 | 622 | 691 |
| $\Delta t$ / K | -0,04 | 1,10 | 4,13 | 5,70 | 7,36 | 9,64 | 11,66 | 13,91 | 17,01 | 22,61 | 23,68 | 25,58 | 27,11 | 33,34 | 30,08 |

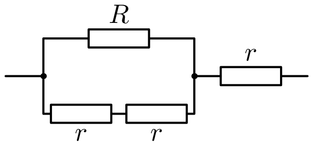



| | |
|---|---|
| 5,18625 | 0,00421 |
| 0,05628 | 1,05733 |
| 0,99847 | 2,30608 |
| 8492,08 | 13 |
| 45160,9 | 69,134 |

Z regresního vzorce druhého grafu je zřejmé, že zvýšení teploty termistoru je téměř přesně přímo úměrné jeho příkonu. Regresním výpočtem pomocí maticového vzorce dostaneme třetí tabulku, ze které vyčteme, že zatěžovací konstanta daného termistoru má hodnotu $D = (5{,}19 \pm 0{,}06)$ mW/K.

*Poznámka:* Použití Excelu v podobných úlohách podrobně vysvětluje studijní text *Teplotní závislosti fyzikálních veličin* (Knihovnička FO č. 51).

**7.** a) Po zapnutí spínače $K_1$ platí: $I_1 = \dfrac{U_e}{r+R}$,



Obr. R7

Po zapnutí spínače $K_2$ k rezistoru jsou rezistory zapojeny podle obr. R7. Platí:

$$I_2 = \frac{U_e}{r + \dfrac{2Rr}{2r+R}}.$$

Dostáváme soustavu rovnic

$$r + R = \frac{U_e}{I_1} = 60\ \Omega, \qquad r + \frac{2Rr}{2r+R} = \frac{U_e}{I_2} = 40\ \Omega.$$

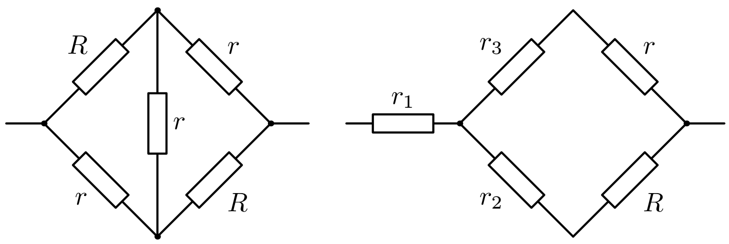
Dosazením $r = 60\ \Omega - R$ do druhé rovnice dojdeme ke kvadratické rovnici

$$\{R\}^2 + 20\{R\} - 2\,400 = 0.$$

Úloze vyhovuje kořen $\{R\} = 40$. Odpory mají hodnoty $R = 40\ \Omega$, $r = 20\ \Omega$.

**3 body**

b) Rezistory jsou teď zapojeny podle obrázku R8. Úlohu můžeme řešit transfigurací hvězda–trojúhelník:



Obr. R8

$$r_1 = \frac{rR}{R+2r} = 10\ \Omega, \quad r_2 = \frac{r^2}{R+2r} = 5\ \Omega, \quad r_3 = \frac{rR}{R+2r} = 10\ \Omega.$$

Celkový odpor

$$R_c = r_1 + \frac{(r_3+r)(r_2+R)}{r_3+r+r_2+R} = 28\ \Omega,$$

Celkový proud

$$I_c = \frac{U_e}{R_c} = 0{,}43\ \text{A}.$$

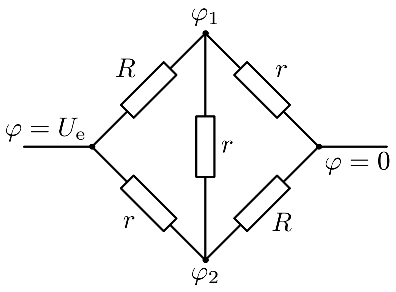
**3 body**

Řešení metodou uzlových potenciálů podle obr. R9: Platí

$$\frac{U_e - \varphi_1}{R} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{r} + \frac{\varphi_1}{r},$$

$$\frac{U_e - \varphi_2}{r} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{r} + \frac{\varphi_2}{R}.$$

Dosazením číselných hodnot a úpravou dojdeme k soustavě rovnic




Obr. R9

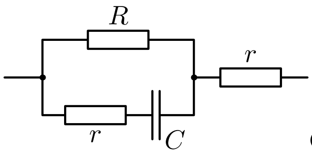
$$5\{\varphi_1\} - 2\{\varphi_2\} = 12, \qquad -2\{\varphi_1\} + 5\{\varphi_2\} = 24,$$

která má řešení $\varphi_1 = \dfrac{108}{21}\ \mathrm{V} \doteq 5{,}143\ \mathrm{V}$, $\varphi_2 = \dfrac{144}{21}\ \mathrm{V} \doteq 6{,}857\ \mathrm{V}$.

Celkový proud je $I_c = \dfrac{\varphi_1}{r} + \dfrac{\varphi_2}{R} = 0{,}43\ \mathrm{A}$.

c) Napětí na kondenzátoru je stejné jako napětí na rezistoru $R$, kterým prochází proud $I_1$ (obr. R10):

$$U_C = RI_1 = 8{,}0\ \mathrm{V}, \qquad Q = U_C C = 32\ \mu\mathrm{C}.$$



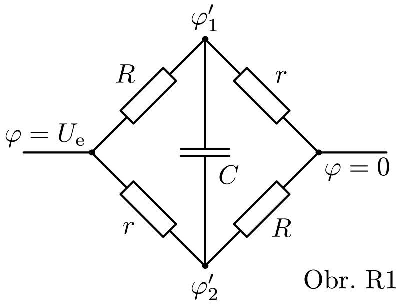

Obr. R10

**2 body**

d) Součástky jsou teď zapojeny podle obr. R11. Platí

$$\frac{U_e - \varphi_1'}{R} = \frac{\varphi_1'}{r} \quad \Rightarrow \quad \varphi_1' = \frac{r}{R+r} U_e = 4{,}0\ \mathrm{V},$$

$$\frac{U_e - \varphi_2'}{r} = \frac{\varphi_2'}{R} \quad \Rightarrow \quad \varphi_2' = \frac{R}{R+r} U_e = 8{,}0\ \mathrm{V},$$




Obr. R11

$$Q = U_C C = (\varphi_2' - \varphi_1')C = 16\ \mu\mathrm{C}.$$

**2 body**