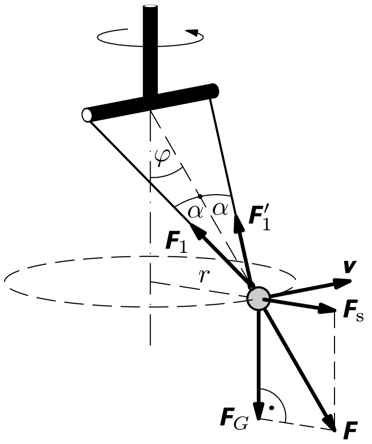
Řešení úloh celostátního kola 52. ročníku fyzikální olympiády.

Autoři úloh: J. Thomas (1), J. Jírů (2), P. Šedivý (4).

3. úloha je převzata z časopisu Kvant. Konečná úprava P. Šedivý

1. Úlohy a) a b) budeme řešit z hlediska pozorovatele v neinerciální vztažné soustavě spojené s rotujícím závěsem, úlohu c) z hlediska pozorovatele v inerciální vztažné soustavě spojené s místností. Vyjdeme z obr. R1.



Obr. R1

a) Výslednice tíhové síly a setrvačné odstředivé síly, které působí na kuličku, leží v rovině vychýleného závěsu. Platí

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{F_\mathrm{s}}{F_G} = \frac{m4\pi^2 f^2 r}{mg} = \frac{4\pi^2 f^2 l \sin\varphi}{g} \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = \frac{g}{4\pi^2 f^2 l}. \qquad (1)$$

Protože $\cos\varphi \leq 1$, může situace podle obr. R2 nastat až pro

$$f > f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} = 0{,}91\ \mathrm{Hz}.$$

4 body

b) Výslednice tíhové síly a setrvačné odstředivé síly je v rovnováze se silami, kterými na kuličku působí obě poloviny bifilárního závěsu. Z obr. R1 plyne

$$F = \frac{F_G}{\cos\varphi} = 2F_1\cos\alpha.$$

V okamžiku přetržení bylo vlákno napínáno silou

$$F_1 = F_1' = \frac{mg}{2\cos\varphi_1\cos\alpha} = 1{,}26\ \mathrm{N}.$$

2 body

c) Podle (1) se v okamžiku přetržení závěsu držák otáčel s frekvencí

$$f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l\cos\varphi_1}}.$$

Okamžitá rychlost kuličky měla velikost $v_1 = 2\pi f_1 l \sin\varphi_1 = \sin\varphi_1\sqrt{\dfrac{gl}{\cos\varphi_1}}$.
Následoval vodorovný vrh z výšky $H + l(1-\cos\varphi_1)$ ve směru tečny k trajektorii. Délka vrhu byla

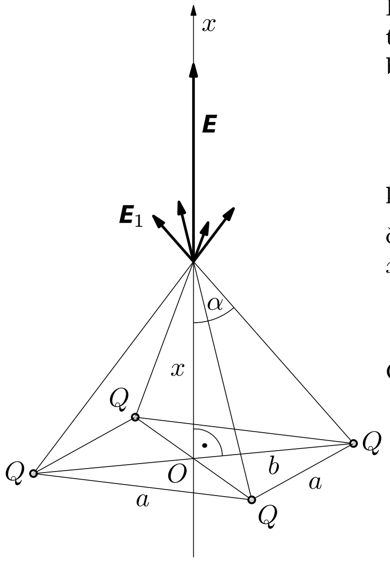
$$L = v_1\sqrt{\frac{2[H + l(1-\cos\varphi_1)]}{g}} = \sin\varphi_1\sqrt{\frac{2l[H + l(1-\cos\varphi_1)]}{\cos\varphi_1}} = 1{,}17\ \mathrm{m}.$$

Vzdálenost d místa dopadu od osy otáčení vypočítáme užitím Pythagorovy věty:

$$d = \sqrt{L^2 + (l\sin\varphi_1)^2} = l\sin\varphi_1\sqrt{\frac{2(H+l)}{l\cos\varphi_1} - 1} = 1{,}20\ \mathrm{m}.$$

4 body

2. a)



Obr. R2

Předpokládejme pro jednoduchost $Q > 0$. Intenzita elektrického pole každého ze čtyř nábojů má v bodě o souřadnici x velikost

$$E_1 = \frac{kQ}{x^2 + b^2},$$

kde $b = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ je polovina délky úhlopříčky čtverce (obr. R2). Průmět intenzity $\boldsymbol{E}_1$ do osy x má velikost

$$E_{1x} = E_1 \cos\alpha = E_1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + b^2}}.$$

Celková velikost intenzity je

$$E = 4E_{1x} = \frac{4kQ}{x^2 + b^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + b^2}} = \frac{4kQx}{(x^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{1}$$

Derivace velikosti intenzity podle souřadnice x je

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = 4kQ \frac{(x^2 + b^2)^{\frac{3}{2}} - x\frac{3}{2}(x^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x}{(x^2 + b^2)^{\frac{6}{2}}} = 4kQ \frac{b^2 - 2x^2}{(x^2 + b^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Z podmínky nulové derivace plyne

$$x_\mathrm{m} = \frac{\sqrt{2}}{2}b = \frac{a}{2}. \tag{2}$$

Pro $x < x_\mathrm{m}$ je derivace kladná a funkce je tedy rostoucí, pro $x > x_\mathrm{m}$ je derivace záporná a funkce je klesající, proto je nalezený extrém maximem. (Tuto skutečnost lze též dokázat pomocí druhé derivace

$$\frac{\mathrm{d}^2E}{\mathrm{d}x^2} = 4kQ \frac{3x(2x^2 - 3b^2)}{(x^2 + b^2)^{\frac{7}{2}}},$$

která pro $x_\mathrm{m} = \frac{\sqrt{2}}{2}b$ vychází záporná.)

Dosazením hodnoty (2) do vztahu (1) dostaneme

$$E_\mathrm{max} = \frac{16}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{kQ}{a^2} = 3{,}11 \cdot 10^6\ \mathrm{V \cdot m^{-1}}.$$ **4 body**

b) Elektrický potenciál ve středu čtverce je

$$\varphi = \frac{4kQ}{b} = \frac{4\sqrt{2}kQ}{a}.$$

Ze zákona zachování energie plyne pro limitní kinetickou energii urychlené částice

$$E_\mathrm{k} = q \cdot \varphi = \frac{4\sqrt{2}kqQ}{a}. \tag{3}$$

Podle klasické fyziky je kinetická energie

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} m_0 v^2. \tag{4}$$

Ze vztahů (3) a (4) plyne

$$v = \sqrt{\frac{8\sqrt{2}kqQ}{m_0 a}}.$$

2 body

Podle teorie relativity je kinetická energie

$$E_\mathrm{k} = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right). \tag{5}$$

Ze vztahů (3) a (5) plyne

$$v = c \sqrt{1 - \frac{1}{\left(\frac{4\sqrt{2}kqQ}{a m_0 c^2} + 1 \right)^2}} = c \sqrt{1 - \frac{a^2 m_0^2 c^4}{(a m_0 c^2 + 4\sqrt{2}kqQ)^2}}.$$

2 body

c) Podle klasické fyziky vychází pro částici alfa $v_\alpha = 4{,}70 \cdot 10^6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, pro elektron $v_e = 2{,}84 \cdot 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Jelikož $v_\alpha \ll c$, lze výsledek podle klasické fyziky pro částici alfa považovat za dostatečně přesný. Velikost rychlosti elektronu je však blízká rychlosti světla, proto je nutné počítat podle relativistického vzorce, kde vychází $v_e = 2{,}17 \cdot 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

2 body

3. a) Obecný případ zobrazení předmětu centrovanou soustavou dvou tenkých spojek znázorňuje obr. R3. Nechť je dána vzdálenost a_1 předmětu od první spojky. Ze zobrazovací rovnice tenké čočky a z obrázku plyne

$$a_1' = \frac{a_1 f_1}{a_1 - f_1}, \qquad a_2' = \frac{a_2 f_2}{a_2 - f_2}, \tag{1}$$

$$a_2 = d - a_1' = \frac{da_1 - df_1 - a_1 f_1}{a_1 - f_1}. \tag{2}$$

Příčné zvětšení výsledného obrazu je

$$Z = Z_1 \cdot Z_2 = \left(-\frac{f_1}{a_1 - f_1}\right) \cdot \left(-\frac{f_2}{a_2 - f_2}\right) =$$
$$= \frac{f_1}{a_1 - f_1} \cdot \frac{f_2}{\dfrac{da_1 - df_1 - a_1 f_1 - f_2 a_1 + f_1 f_2}{a_1 - f_1}} = \frac{f_1 f_2}{a_1(d - f_1 - f_2) - df_1 + f_1 f_2}.$$

Nemá-li příčné zvětšení výsledného obrazu záviset na vzdálenosti a_1 předmětu od první čočky, nesmí výraz proměnnou a_1 obsahovat, musí platit

$$d = f_1 + f_2,$$

to znamená, že obrazové ohnisko první spojky musí splývat s předmětovým ohniskem druhé spojky. Tuto situaci znázorňuje obr. R4. Příčné zvětšení výsledného obrazu pak je

$$Z = -\frac{f_2}{f_1}.$$

Ke stejnému výsledku můžeme dojít jednoduchou úvahou: Paprsek, který přichází z vrcholu předmětu na první spojku rovnoběžně s optickou osou je společný pro všechny polohy předmětu (body A, B, C). Po lomu na první a druhé spojce musí jít opět rovnoběžně s optickou osou, neboť prochází ve všech případech vrcholem obrazu, jehož velikost se podle předpokladu úlohy nemění (body A'', B'', C''). Toho lze dosáhnout jedině tak, že ohniska F_1' a F_2 splynou.

5 bodů

b) Jestliže $d = f_1 + f_2$, pak ze vztahů (1) a (2) pro polohu výsledného obrazu plyne

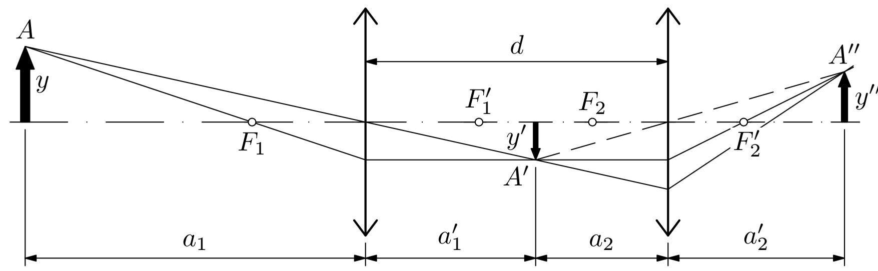
$$a_2' = \frac{(d - a_1')f_2}{d - a_1' - f_2} = \frac{\left(f_1 + f_2 - \dfrac{a_1 f_1}{a_1 - f_1}\right) f_2}{f_1 - \dfrac{a_1 f_1}{a_1 - f_1}} =$$
$$= \frac{a_1 f_1 f_2 + a_1 f_2^2 - f_1^2 f_2 - f_1 f_2^2 - a_1 f_1 f_2}{-f_1^2} = \frac{(f_1 + f_2) f_2}{f_1} - a_1 \frac{f_2^2}{f_1^2}.$$

Dostali jsme klesající lineární funkci, jejíž graf je na obr. R5. Výsledný obraz se pohybuje rovnoměrně stejným směrem jako předmět. Z počáteční polohy ve vzdálenosti $\dfrac{(f_1 + f_2) f_2}{f_1}$ od druhé spojky se přibližuje k čočce rychlostí o velikosti

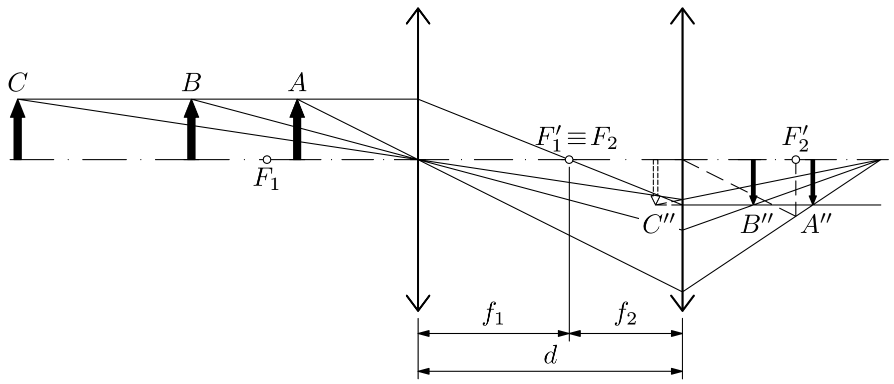
$$v' = \left|\frac{\mathrm{d}a_2'}{\mathrm{d}t}\right| = \left|-\frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{f_2^2}{f_1^2}\right| = v\frac{f_2^2}{f_1^2}.$$

V okamžiku, kdy předmět dosáhne vzdálenosti $\dfrac{(f_1+f_2)f_1}{f_2}$ od první spojky, se reálný obraz změní na zdánlivý.

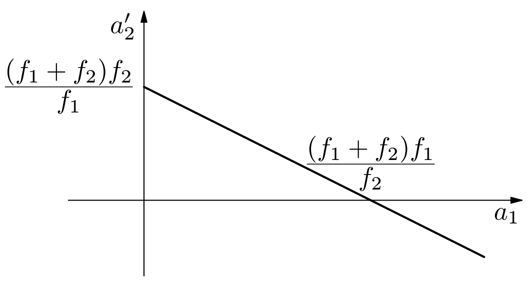
5 bodů



Obr. R3



Obr. R4



Obr. R5

4. a) Po dosažení mezní rychlosti je tíhová síla působící na kouli v rovnováze se vztlakovou silou

$$F_{\mathrm{vz}} = V\varrho g = \frac{m\varrho g}{\varrho_{\mathrm{k}}}$$

a odporovou silou

$$F_{\mathrm{o}} = \frac{1}{2}C \cdot \pi r^2 \varrho v_{\mathrm{m}}^2 = K v_{\mathrm{m}}^2.$$

Poloměr koule určíme z její hmotnosti a hustoty:

$$m = \frac{4}{3}\pi\varrho_{\mathrm{k}} r^3 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi\varrho_{\mathrm{k}}}}.$$

Pak

$$K = \frac{1}{2}C\pi\varrho\left(\frac{3m}{4\pi\varrho_{\mathrm{k}}}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Platí

$$mg = \frac{m\varrho g}{\varrho_{\mathrm{k}}} + K v_{\mathrm{m}}^2 \quad \Rightarrow \quad v_{\mathrm{m}} = \sqrt{\frac{mg(\varrho_{\mathrm{k}} - \varrho)}{K\varrho_{\mathrm{k}}}}.$$

Číselně vychází $r = 0{,}060\,57$ m, $K = 2{,}766\ \mathrm{N\cdot s^2\cdot m^{-2}}$, $v_{\mathrm{m}} = 4{,}74\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

3 body

b) Koule se pohybuje se zrychlením

$$a = \frac{F_G - F_{\mathrm{vz}} - F_{\mathrm{o}}}{m} = \frac{g(\varrho_{\mathrm{k}} - \varrho)}{\varrho_{\mathrm{k}}} - \frac{K}{m}v^2.$$

Počáteční podmínky děje jsou

$$a_0 = \frac{g(\varrho_{\mathrm{k}} - \varrho)}{\varrho_{\mathrm{k}}}, \quad v_0 = 0, \quad s_0 = 0.$$

Při použití Eulerovy metody modelování s časovým krokem h použijeme buď rekurentní vztahy metody AVR

$$a_i = \frac{g(\varrho_{\mathrm{k}} - \varrho)}{\varrho_{\mathrm{k}}} - \frac{K}{m}v_i^2, \quad v_{i+1} = v_i + a_i * h, \quad s_{i+1} = s_i + v_{i+1} * h,$$

nebo rekurentní vztahy metody ARV

$$a_i = \frac{g(\varrho_{\mathrm{k}} - \varrho)}{\varrho_{\mathrm{k}}} - \frac{K}{m}v_i^2, \quad s_{i+1} = s_i + v_i * h, \quad v_{i+1} = v_i + a_i * h.$$

3 body

Výsledky výpočtů jsou v prvním případě zapsány v tab. 1, v druhém případě v tab. 2. Oběma způsoby dojdeme k závěru, že koule během první sekundy klesání dosáhne rychlosti přibližně 4,6 m · s^{-1}, která se blíží k mezní rychlosti, a urazí dráhu přibližně 3 metry. Pokud bychom chtěli získat přesnější hodnoty, museli bychom zmenšit časový krok.

Poznámka
Při tvorbě modelu jsme v autorském řešení pracovali s *velikostmi* zrychlení, rychlosti a dráhy. Mohli jste také pracovat se *souřadnicemi* zrychlení, rychlosti a polohy. Pokud jste zvolili směr vzhůru jako kladnou orientaci, vycházely ovšem všechny souřadnice záporné, což není na závadu.

t / s	a / m.s^{-2}	v / m.s^{-1}	s / m
0,0	8,552	0,000	0,000
0,1	8,552	0,855	0,086
0,2	8,274	1,683	0,254
0,3	7,474	2,430	0,497
0,4	6,303	3,060	0,803
0,5	4,984	3,559	1,159
0,6	3,727	3,931	1,552
0,7	2,664	4,198	1,972
0,8	1,839	4,382	2,410
0,9	1,238	4,505	2,860
1,0	0,819	4,587	3,319

tab. 1

t / s	a / m.s^{-2}	v / m.s^{-1}	s / m
0,0	8,552	0,000	0,000
0,1	8,552	0,855	0,000
0,2	8,274	1,683	0,086
0,3	7,474	2,430	0,254
0,4	6,303	3,060	0,497
0,5	4,984	3,559	0,803
0,6	3,727	3,931	1,159
0,7	2,664	4,198	1,552
0,8	1,839	4,382	1,972
0,9	1,238	4,505	2,410
1,0	0,819	4,587	2,860

tab.2

4 body

Analytické řešení úlohy
Pohybovou rovnici klesající koule

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{g(\varrho_\mathrm{k} - \varrho)}{\varrho_\mathrm{k}} - \frac{K}{m}v^2$$

můžeme upravit na tvar

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}v}{P - Qv^2} = \frac{\mathrm{d}v}{2\sqrt{P}}\left(\frac{1}{\sqrt{P} + \sqrt{Q}v} + \frac{1}{\sqrt{P} - \sqrt{Q}v}\right),$$

kde $P = \dfrac{g(\varrho_\mathrm{k} - \varrho)}{\varrho_\mathrm{k}}$, $Q = \dfrac{K}{m}$. Integrací dostaneme

$$\int\limits_0^t \mathrm{d}t = t = \frac{1}{2\sqrt{P}}\left(\int\limits_0^v \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{P} + \sqrt{Q}v} + \int\limits_0^v \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{P} - \sqrt{Q}v}\right) = \frac{1}{2\sqrt{PQ}} \ln \frac{\sqrt{P} + \sqrt{Q}v}{\sqrt{P} - \sqrt{Q}v}.$$

Z toho

$$\sqrt{P} + \sqrt{Q}v = \left(\sqrt{P} - \sqrt{Q}v\right)\mathrm{e}^{2t\sqrt{PQ}},$$

$$v = \frac{\sqrt{P}\left(\mathrm{e}^{2t\sqrt{PQ}} - 1\right)}{\sqrt{Q}\left(\mathrm{e}^{2t\sqrt{PQ}} + 1\right)} = v_\mathrm{m}\frac{\mathrm{e}^{t\sqrt{PQ}} - \mathrm{e}^{-t\sqrt{PQ}}}{\mathrm{e}^{t\sqrt{PQ}} + \mathrm{e}^{-t\sqrt{PQ}}} = v_\mathrm{m}\mathrm{tgh}(t\sqrt{PQ}).$$

Druhou integrací dostaneme

$$s = \int_0^t v \,\mathrm{d}t = \frac{v_\mathrm{m}}{\sqrt{PQ}} \left[\ln \left(\mathrm{e}^{t\sqrt{PQ}} + \mathrm{e}^{-t\sqrt{PQ}} \right) - \ln 2 \right] =$$

$$= \frac{1}{Q} \ln \frac{\mathrm{e}^{t\sqrt{PQ}} + \mathrm{e}^{-t\sqrt{PQ}}}{2} = \frac{1}{Q} \ln \left[\cosh \left(t\sqrt{PQ} \right) \right].$$

Po dosazení číselných hodnot zjistíme, že koule za 1 sekundu od uvolnění získala rychlost $4{,}49\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a urazila dráhu $2{,}99$ m. Na následujícím obrázku pořízeném programem Coach 5 můžeme porovnat, jak se po jednotlivých krocích liší výsledky (v, s) našeho numerického modelu získaného metodou AVR od přesných hodnot (vs, ss) analytického výpočtu.