Řešení praktické úlohy celostátního kola 52. ročníku FO

1. Spojení do hvězdy

a) Tabulka naměřených hodnot

	$\frac{R_{AB}}{\Omega}$	$\frac{R_{BC}}{\Omega}$	$\frac{R_{CA}}{\Omega}$
Naměřené hodnoty	443	1 298	1 500
Měřicí rozsah	2 000	2 000	2 000
Chyba měřidla	5,5	12,4	14,0

b) **Určení odporů rezistorů spojených do hvězdy – odvození vztahů**

Platí

$$R_{AB} = R_1 + R_2, \tag{1}$$

$$R_{BC} = R_2 + R_3, \tag{2}$$

$$R_{CA} = R_1 + R_3. \tag{3}$$

Řešením soustavy dostaneme

$$R_1 = \frac{R_{AB} + R_{CA} - R_{BC}}{2}, \tag{4}$$

$$R_2 = \frac{R_{AB} + R_{BC} - R_{CA}}{2}, \tag{5}$$

$$R_3 = \frac{R_{BC} + R_{CA} - R_{AB}}{2}. \tag{6}$$

Určení odporů rezistorů spojených do hvězdy – výpočet

$$R_1 = 322{,}5\ \Omega, \qquad R_2 = 120{,}5\ \Omega, \qquad R_3 = 1\,177{,}5\ \Omega.$$

c) **Určení chyb vypočítaných hodnot**

Chyby vypočítaných hodnot jsou u všech třech rezistorů stejné:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{(\varepsilon R_{AB})^2 + (\varepsilon R_{BC})^2 + (\varepsilon R_{CA})^2}}{2}, \tag{7}$$

Pro dané hodnoty $\varepsilon = 9{,}7\ \Omega \doteq 10\ \Omega$.

Shrnutí 1. části:

$$R_1 = (320 \pm 10)\ \Omega, \quad R_2 = (120 \pm 10)\ \Omega, \quad R_3 = (1\,180 \pm 10)\ \Omega.$$

2. Spojení do trojúhelníku

a) Tabulka naměřených hodnot

	$\frac{R_{DE}}{\Omega}$	$\frac{R_{EF}}{\Omega}$	$\frac{R_{FD}}{\Omega}$
Naměřené hodnoty	720	1 602	1 672
Měřicí rozsah	2 000	2 000	2 000
Chyba měřidla	7,8	14,9	15,5

b) **Získání zbývajících vztahů cyklickou záměnou**

$$y = R_5 = \frac{2(ab+bc+ca) - a^2 - b^2 - c^2}{2(c+a-b)}, \tag{8}$$

$$z = R_6 = \frac{2(ab+bc+ca) - a^2 - b^2 - c^2}{2(a+b-c)}. \tag{9}$$

c) **Výpočet odporů R_4 až R_6**

$$R_4 = 820{,}5\ \Omega \doteq 820\ \Omega, \quad R_5 = 2\,652,7\ \Omega \doteq 2\,650\ \Omega,$$
$$R_6 = 3\,224\ \Omega \doteq 3\,220\ \Omega.$$

d) **Odvození vztahu (1) v zadání**
Platí

$$R_{DE} = \frac{R_4(R_5+R_6)}{R_4+R_5+R_6}, \tag{10}$$

$$R_{EF} = \frac{R_5(R_4+R_6)}{R_4+R_5+R_6}, \tag{11}$$

$$R_{FD} = \frac{R_6(R_4+R_5)}{R_4+R_5+R_6}. \tag{12}$$

Při použití jednoduššího označení $R_4 + R_5 + R_6 = S$,

$$R_4 = x, \quad R_5 = y, \quad R_6 = z, \quad R_{DE} = a, \quad R_{EF} = b, \quad R_{FD} = c$$

$$S \cdot a = xy + xz, \tag{13}$$

$$S \cdot b = yx + yz, \tag{14}$$

$$S \cdot c = zx + zy \tag{15}$$

Sečtením (13) a (14) a odečtením (15) dostaneme

$2xy = S(a + b - c)$, podobně $2yz = S(b + c - a)$, $2xz = S(a + c - b)$.

Z toho

$$\frac{y}{x} = \frac{b + c - a}{a + c - b} \quad \Rightarrow \quad y = x\frac{b + c - a}{a + c - b},$$

$$\frac{z}{x} = \frac{b + c - a}{a + b - c} \quad \Rightarrow \quad z = x\frac{b + c - a}{a + b - c}.$$

Dosazením do (13) dostaneme

$$x\left(1 + \frac{b + c - a}{a + c - b} + \frac{b + c - a}{a + b - c}\right)a = x^2\left(\frac{b + c - a}{a + c - b} + \frac{b + c - a}{a + b - c}\right),$$

a po úpravě

$$x = R_4 = \frac{2(ab + bc + ca) - a^2 - b^2 - c^2}{2(b + c - a)}. \tag{16}$$

Kontrola výsledků:
Přesné hodnoty odporů použitých v dané černé skříňce jsou

$$R_1 = 325\ \Omega, \quad R_2 = 119\ \Omega, \quad R_3 = 1\,186\ \Omega,$$

$$R_4 = 825\ \Omega, \quad R_5 = 2\,670\ \Omega, \quad R_6 = 3\,260\ \Omega.$$

Jiné odvození vztahů pro výpočet odporů spojených do trojúhelníku s použitím transfigurace hvězda – trojúhelník
Představme si, že ke zdířkám D, E, F připojíme ekvivalentní hvězdu podle obr. R1. Pak platí

$$r_5 + r_6 = a, \quad r_6 + r_4 = b, \quad r_4 + r_5 = c.$$

Řešením této soustavy rovnic dostaneme

$$r_4 = \frac{b + c - a}{2}, \quad r_5 = \frac{c + a - b}{2}, \quad r_6 = \frac{a + b - c}{2}.$$

Z transfiguračních vztahů hvězda – trojúhelník

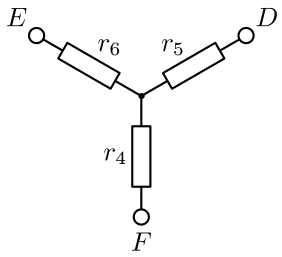
$$R_4 = \frac{r_5 r_6}{r_4} + r_5 + r_6, \quad R_5 = \frac{r_6 r_4}{r_5} + r_6 + r_4, \quad R_6 = \frac{r_4 r_5}{r_6} + r_4 + r_5$$

plyne

$$R_4 = \frac{(a+c-b)(a+b-c)}{2(b+c-a)} + \frac{a+c-b}{2} + \frac{a+b-c}{2} =$$
$$= \frac{2(ab+bc+ca) - a^2 - b^2 - c^2}{2(b+c-a)}.$$

Stejně odvodíme

$$R_5 = \frac{2(ab+bc+ca) - a^2 - b^2 - c^2}{2(c+a-b)}, \quad R_6 = \frac{2(ab+bc+ca) - a^2 - b^2 - c^2}{2(a+b-c)}$$



Obr. R1