Řešení úloh krajského kola 52. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie A

Autoři úloh: J. Jírů (1), P. Šedivý (2, 4), J. Thomas (3)

1. a) Moment setrvačnosti smyčky je

$$J_1 = 2 \cdot \frac{m_1}{4}\left(\frac{l}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{m_1}{4} l^2 = \frac{1}{6} m_1 l^2.$$

Konstantní tíhová síla závaží způsobuje rovnoměrně zrychlený posuvný pohyb závaží a s ním vázaný rovnoměrně zrychlený otáčivý pohyb kladky a smyčky podle pohybové rovnice

$$mg = ma + \frac{J_0 + \frac{1}{6} m_1 l^2}{r} \varepsilon, \quad \text{kde} \quad a = r\varepsilon.$$

Z pohybové rovnice plyne

$$m = \frac{J_0 + \frac{1}{6} m_1 l^2}{(g - r\varepsilon) r} \varepsilon. \tag{1}$$

Z rovnice pro úhlovou dráhu rovnoměrně zrychleného rotačního pohybu $\varphi = \frac{1}{2}\varepsilon t^2$ dostaneme $\varepsilon = \frac{2\varphi}{t^2}$ a pro konkrétní hodnoty proměnných $t = T$, $\varphi = 2\pi$ pak $\varepsilon = \frac{4\pi}{T^2}$. Dosazením do (1) dostaneme hledanou hmotnost

$$m = \frac{J_0 + \frac{1}{6} m_1 l^2}{\left(g - \frac{4\pi r}{T^2}\right) r} \cdot \frac{4\pi}{T^2} = 3{,}4 \text{ g}.$$

Jiné řešení:
Místo pohybové rovnice použijeme zákon zachování mechanické energie:

$$mg \cdot 2\pi r = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2}\left(J_0 + \frac{1}{6} m_1 l^2\right)\omega^2,$$

kde $v = r\omega$. Z rovnic plyne

$$m = \frac{J_0 + \frac{1}{6} m_1 l^2}{(4\pi g - r\omega^2) r} \omega^2 \tag{2}$$

Z rovnic pro rovnoměrně zrychlený rotační pohyb $\varphi = \frac{1}{2}\varepsilon t^2$, $\omega = \varepsilon t$

vyloučíme úhlové zrychlení: $\omega = \dfrac{2\varphi}{t}$ a pro konkrétní hodnoty proměnných $t = T$, $\varphi = 2\pi$ dostaneme $\omega = \dfrac{4\pi}{T}$. Dosazení do (2) pak vede ke stejnému výsledku. **4 body**

b) Indukční tok procházející smyčkou během jejího otáčení závisí na čase podle rovnice

$$\varPhi = Bl^2 \sin\left(\frac{1}{2}\varepsilon t^2\right) = Bl^2 \sin\left(2\pi\frac{t^2}{T^2}\right).$$

Její časovou derivací dostaneme závislost indukovaného napětí na čase

$$u = -\frac{\mathrm{d}\varPhi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Bl^2 \sin\left(2\pi\frac{t^2}{T^2}\right) = -\frac{4\pi Bl^2 t}{T^2}\cos\left(2\pi\frac{t^2}{T^2}\right).$$

2 body

c) Indukované napětí je nulové v čase $t_1 = 0$, a dále v časech t_2, t_3 splňujících podmínky

$$2\pi\frac{t^2}{T^2} = \frac{\pi}{2}, \qquad 2\pi\frac{t^2}{T^2} = \frac{3\pi}{2}.$$

z nichž plyne $t_2 = \dfrac{T}{2} = 0{,}50$ s, $t_3 = \dfrac{\sqrt{3}T}{2} = 0{,}87$ s.

3 body

d) V čase $t_\mathrm{m} = T = 1{,}00$ s je rychlost otáčení maximální a kosinus příslušného úhlu roven jedné. Indukční tok se tedy mění nejrychleji. Velikost maximálního indukovaného napětí je

$$|U_\mathrm{m}| = \frac{4\pi Bl^2}{T} = 3{,}6 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{V}.$$

1 bod

2. a) Z kinematických zákonů šikmého vrhu

$$x = v_0 \cos\alpha \cdot t, \qquad y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{1}$$

odvodíme vztahy pro výpočet doby letu a délky vrhu

$$T = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g}, \qquad L = \frac{2 v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}. \tag{2}$$

Řešením této soustavy rovnic dostaneme

$$v_0 = \frac{gT}{2\sin\alpha}, \quad L = \frac{2 g^2 T^2 \sin\alpha\cos\alpha}{4 g \sin^2\alpha} = \frac{gT^2}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}.$$

Z toho

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{gT^2}{2L} = 3{,}626, \quad \alpha = 74{,}6^\circ, \quad v_0 = 31{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

5 bodů

b) Platí $r^2 = x^2 + y^2$. Užitím vztahů (1) dostaneme

$$r^2 = (v_0\cos\alpha)^2 t^2 + (v_0 \sin\alpha)^2 t^2 - v_0 g \sin\alpha \cdot t^3 + \frac{g^2}{4} t^4 =$$
$$= v_0^2 t^2 - v_0 g \sin\alpha \cdot t^3 + \frac{g^2}{4} t^4.$$

Abychom nalezli extrém, funkci zderivujeme a derivaci položíme rovnou nule:

$$\frac{\mathrm{d}(r^2)}{\mathrm{d}t} = 2 v_0^2 t - 3 v_0 g \sin\alpha \cdot t^2 + g^2 t^3 = t(2v_0^2 - 3 v_0 g \sin\alpha \cdot t + g^2 t^2) = 0. \tag{3}$$

Rovnice má kořen $t_1 = 0$, který úloze nevyhovuje. Zbývající kořeny získáme řešením kvadratické rovnice:

$$t_{2,3} = \frac{3 v_0 g \sin\alpha \mp \sqrt{9 v_0^2 g^2 \sin^2\alpha - 8 v_0^2 g^2}}{2g^2} = \left(3\sin\alpha \mp \sqrt{9\sin^2\alpha - 8}\right)\frac{v_0}{2g}.$$

Pro dané hodnoty v_0 a α, které jsme určili v úkolu a), je $t_2 = 3{,}68$ s, $t_3 = 5{,}62$ s. Druhá derivace

$$\frac{d^2(r^2)}{\mathrm{d}t^2} = 2v_0^2 - 6 v_0 g \sin\alpha \cdot t + 3 g^2 t^2$$

má pro $t = t_2$ má hodnotu $-690 < 0$, což odpovídá maximu funkce, pro $t = t_3$ má hodnotu $1\,050 > 0$, což odpovídá lokálnímu minimu. Kámen se tedy vzdaloval až do času t_2, pak se k místu vrhu přibližoval až do času t_3 a v krátké době zbývající do dopadu na zem se ještě poněkud vzdálil.

Polohu kamene v čase t_2 a jeho maximální vzdálenost od místa vrhu určíme pomocí vztahů (1):

$$x = 31\ \mathrm{m}, \quad y = 45\ \mathrm{m}, \quad r_{\max} = \sqrt{x^2 + y^2} = 55\ \mathrm{m}.$$

Kámen se nacházel v největší vzdálenosti $r_{\max} = 55$ m od místa vrhu v místě o souřadnicích $x = 31$ m, $y = 45$ m a v čase $t_2 = 3{,}7$ s.

5 bodů

Jiné řešení úkolu b): V nejvzdálenějším bodě trajektorie jsou vektory $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{v}$ navzájem kolmé. Platí

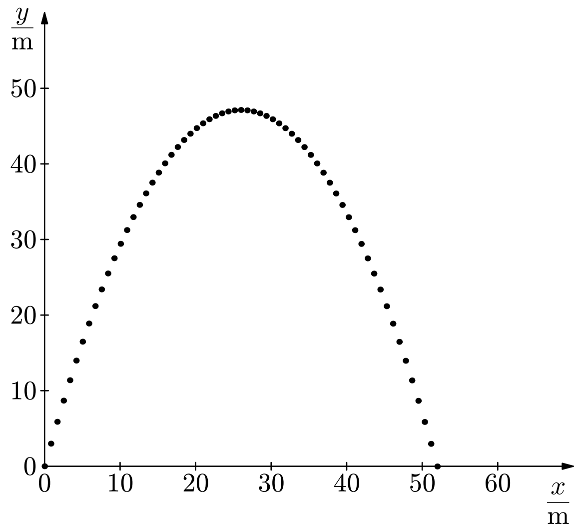
$$v_x = v_0 \cos\alpha, \qquad v_y = v_0 \sin\alpha - gt,$$

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{v} = v_0^2 \cos^2\alpha \cdot t + v_0^2 \sin^2\alpha \cdot t - \frac{3}{2} v_0 g \sin\alpha \cdot t^2 + \frac{g^2}{2} t^3 = 0,$$

$$t(2v_0^2 - 3v_0 g \sin\alpha \cdot t + g^2 t^2) = 0.$$

Dospěli jsme tedy opět k rovnici (3) s výše určenými kořeny t_1, t_2 a t_3. Porovnáním vzdáleností kamene v časech t_2 a t_3 dojdeme ke správnému výsledku.

Na obrázku R1 je znázorněn vyšetřovaný pohyb kamene s vyznačenými polohami po 0,1 s.



Obr. R1

3. a) Za kulovou plochu proniknou pouze paprsky, které na ni dopadají pod menším úhlem, než je mezní úhel ε_m. Platí:

$$\sin\varepsilon_\mathrm{m} = \frac{1}{n} \quad\Rightarrow\quad \varepsilon_\mathrm{m} = 41{,}8^\circ.$$

Krajní paprsky projdou ve vzdálenosti

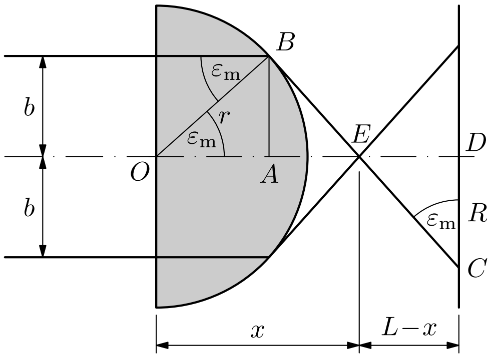
$$b = r\sin\varepsilon_\mathrm{m} = \frac{r}{n} = 2{,}67\ \mathrm{cm}$$

od optické osy, která splňuje podmínku $b < a$. U paprsků vzdálenějších od osy dojde k úplnému odrazu (obr. R2). Z podobnosti trojúhelníků ABE a DCE a z pravoúhlého trojúhelníka OBE plyne

$$\operatorname{tg}\varepsilon_\mathrm{m} = \frac{L-x}{R},$$

z čehož $R = \dfrac{L-x}{\operatorname{tg}\varepsilon_\mathrm{m}} = \left(L - \dfrac{r}{\cos\varepsilon_\mathrm{m}}\right)\cdot\dfrac{\cos\varepsilon_\mathrm{m}}{\sin\varepsilon_\mathrm{m}} = (L\cos\varepsilon_\mathrm{m} - r)\cdot\dfrac{1}{\sin\varepsilon_\mathrm{m}},$

$$R = L\sqrt{n^2-1} - nr = 2{,}94\ \mathrm{cm}.$$



Obr. R2 **5 bodů**

b) Průchod krajního paprsku polokoulí znázorňuje obr. R3. Platí:

$$\sin\alpha = \frac{a}{r},\quad \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n},\quad \sin\gamma = n\sin(\alpha-\beta).$$

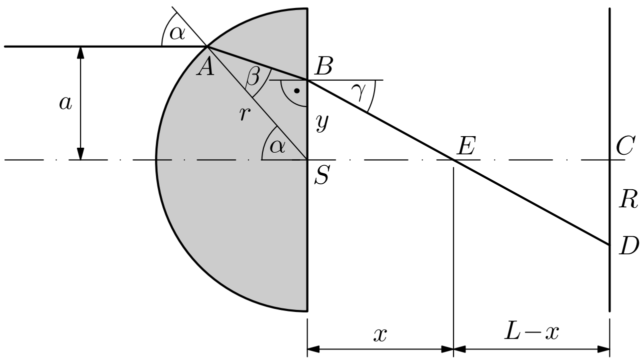
V trojúhelníku ABS platí sinová věta:

$$\frac{y}{\sin\beta} = \frac{r}{\sin(90^\circ+\alpha-\beta)} = \frac{r}{\cos(\alpha-\beta)} \quad\Rightarrow\quad y = \frac{r\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)}.$$

Z trojúhelníku BSE: $x = \dfrac{y}{\operatorname{tg}\gamma}$, z podobnosti trojúhelníků BSE a DCE

$$\frac{y}{x} = \frac{R}{L - x} \qquad \Rightarrow \qquad R = \frac{y}{x}(L - x).$$

Číselně: $\alpha = 48{,}6°$, $\beta = 30°$, $\gamma = 28{,}6°$, $y = 2{,}11$ cm, $x = 3{,}88$ cm, $R = 2{,}25$ cm.



Obr. R3 **5 bodů**

4. a) V konečném stavu bude na obou kondenzátorech stejné napětí $u_1 = u_2 = u$. Ze zákona zachování náboje plyne

$$CU = Cu + 2Cu = 3Cu \quad \Rightarrow \quad u = U/3.$$ **1 bod**

b) Zákon zachování náboje platí během celého děje, takže

$$CU = Cu_1 + 2Cu_2 \quad \Rightarrow \quad U = u_1 + 2u_2. \tag{1}$$

Z toho $u_2 = \dfrac{U - u_1}{2} = \dfrac{U}{4}$. **1 bod**

c) Je-li na prvním kondenzátoru napětí u_1 a na druhém napětí $u_2 < u_1$, prochází rezistorem proud, kterým se první kondenzátor vybíjí a druhý kondenzátor nabíjí. Platí

$$i = \frac{u_1 - u_2}{R} = -\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}t} = -C\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} = 2C\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}. \tag{2}$$

Úpravou dostaneme vztahy potřebné pro vytvoření algoritmu postupného výpočtu:

$$\mathrm{d}u_1 = -\frac{u_1 - u_2}{RC}\mathrm{d}t, \qquad \mathrm{d}u_2 = \frac{u_1 - u_2}{2RC}\mathrm{d}t. \tag{3}$$

3 body

V počítačovém programu bychom zadali počáteční podmínky, konstanty a časový krok

```
u1=10   u2=0
R=1e6  C=1e(-6)  h=0.1
```

a vlastní výpočet bychom provedli opakováním příkazů

```
u1:=u1-(u1-u2)/R/C*h
u2:=u2+(u1-u2)/2/R/C*h
```

Podle stejného algoritmu můžeme provést výpočet pomocí kalkulačky. (Jako v době, kdy numerické metody vznikly. Tehdy se ovšem používaly kalkulačky mechanické.) Výpočet opakujeme, dokud hodnota u_1 neklesne pod 5. Z tabulky je zřejmé, že napětí na prvním kondenzátoru klesne na polovinu přibližně za 0,9 s.

t / s	u_1 / V	u_2 / V
0	10,00000	0,00000
0,1	9,00000	0,50000
0,2	8,15000	0,92500
0,3	7,42750	1,28625
0,4	6,81338	1,59331
0,5	6,29137	1,85432
0,6	5,84766	2,07617
0,7	5,47051	2,26474
0,8	5,14994	2,42503
0,9	4,87745	2,56128
1	4,64583	2,67709

3 body

Ze vztahů (3) je zřejmé, že rychlost změny napětí na kondenzátorech je nepřímo úměrná hodnotě součinu RC. Doba, za kterou se uskuteční požadovaná změna, je tedy přímo úměrná hodnotě RC. V našem modelu je $RC = 1$ s. Při jiných hodnotách R a C bude doba poklesu napětí na prvním kondenzátoru na polovinu přibližně rovna 0,9RC. **2 body**

Doplněk – porovnání numerického modelu s analytickým řešením:

Jestliže z (1) vyjádříme u_2 a dosadíme do (3), dostaneme diferenciální rovnici

$$RC\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} + \frac{3}{2}u_1 = \frac{U}{2},$$

která má při daných počátečních podmínkách ($t = 0,\ u_1 = U$) řešení

$$u_1 = \frac{U}{3} + \frac{2}{3}U\mathrm{e}^{-\frac{3}{2RC}t}.$$

Z rovnice

$$\frac{U}{3} + \frac{2}{3}U\mathrm{e}^{-\frac{3}{2RC}t} = \frac{U}{2}$$

dostaneme $t = \dfrac{2}{3}RC \cdot \ln 4 \doteq 0{,}924RC$, což je v dobrém souladu s výsledkem určeným z numerického modelu.