Řešení úloh 1. kola 52. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie A*

Autoři úloh: I. Charvát (1), J. Thomas (2, 3), P. Šedivý (4 až 7)

1.a) Aby obě tělesa dopadla do stejného místa, musí jejich trajektorie ležet v téže svislé rovině. V ní zavedeme obvyklým způsobem pravoúhlou souřadnicovou soustavu Oxy. Vyjdeme ze vzorců pro výpočet doby letu T a délky vrhu L šikmého vrhu s počáteční rychlostí o velikosti v_0 a elevačním úhlem α:

$$T = \frac{2v_0}{g}\sin\alpha, \qquad L = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\alpha), \qquad \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Ze zadání úlohy plyne pro doby letu T_1, T_2 prvního a druhého tělesa

$$T_1 > T_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 > \alpha_2. \tag{1}$$

Délky L_1, L_2 obou vrhů jsou stejné, proto

$$\sin(2\alpha_1) = \sin(2\alpha_2),$$

což může být vzhledem k vlastnostem funkce sinus splněno, jen když

$$2\alpha_1 = \pi - 2\alpha_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha_2.$$

Pak ale můžeme provést substituci

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{4} + \varphi, \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{4} - \varphi, \quad \text{kde} \quad \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right). \tag{2}$$

Druhé těleso musí být vrženo se zpožděním

$$\Delta t = T_1 - T_2 = \frac{2v_0}{g}(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2) = \frac{2v_0}{g}(\sin\alpha_1 - \cos\alpha_1). \tag{3}$$

Závěr: Aby obě tělesa dopadla současně do téhož místa, musí být splněny podmínky (1), (2) a (3).

5 bodů

b) Pro dané hodnoty vychází $L = 83{,}8$ m, $T_1 = 5{,}13$ s, $T_2 = 3{,}33$ s, $\Delta t = 1{,}80$ s.
Pohyb prvního tělesa popisují kinematické zákony

$$x_1 = v_0 \cos\alpha_1 t, \tag{4}$$

$$y_1 = v_0 \sin\alpha_1 t - \frac{1}{2}gt^2, \quad \text{pro} \quad t \in (0, T_1). \tag{5}$$

Vyjádřením času t z (4) a dosazením do (5) dostaneme rovnici trajektorie

$$y_1 = x_1 \operatorname{tg}\alpha_1 - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha_1}x_1^2, \quad \text{pro} \quad x_1 \in \langle 0, L\rangle. \tag{6}$$

Pro druhé těleso platí

$$x_2 = v_0 \cos\alpha_2 (t - \Delta t), \tag{7}$$

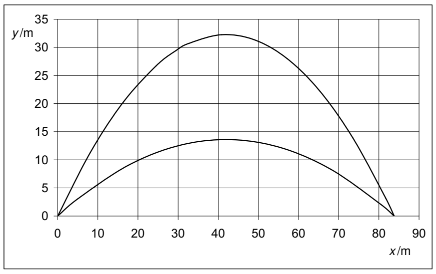
$$y_2 = v_0 \sin\alpha_2 (t - \Delta t) - \frac{1}{2} g (t - \Delta t)^2, \quad \text{pro} \quad t \in (\Delta t, T_1). \tag{8}$$

$$y_2 = x_2 \operatorname{tg}\alpha_2 - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha_2} x_2^2, \qquad x_2 \in \langle 0, L\rangle, \tag{9}$$

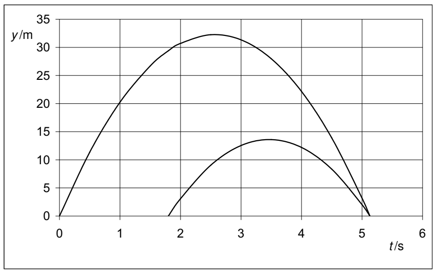
což musíme doplnit vztahem

$$x_2 = y_2 = 0 \quad \text{pro} \quad \langle 0, \Delta t\rangle. \tag{10}$$

Trajektorie těles můžeme nakreslit například v Excelu jako grafy funkcí (6) a (9) s přihlédnutím k (10). Přitom bychom měli na obou osách nastavit stejné měřítko (obr. R1). Grafy závislosti výšky těles na čase získáme podobně jako grafy funkcí (5) a (8) s přihlédnutím k (10) (obr. R2).



Obr. R1



Obr. R2

5 bodů

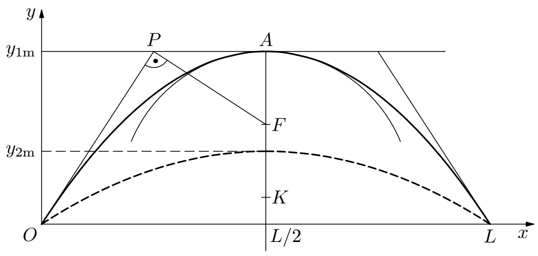
Alternativní řešení úlohy b): Hledané grafy jsou úseky parabol. Můžeme je přibližně sestrojit „ruční“ konstrukcí parabol podle obr. R3. V takovém případě však musíme ještě určit výšky výstupu obou těles

$$y_{1\mathrm{m}} = \frac{v_0^2}{g} \sin^2\alpha_1 = 32{,}3 \text{ m}, \qquad y_{2\mathrm{m}} = \frac{v_0^2}{g} \sin^2\alpha_2 = 13{,}6 \text{ m}.$$

Vycházíme z těchto vlastností paraboly:

- Tečna v bodě paraboly půlí úsek na tečně vrcholové.
- Kolmice vedená z ohniska paraboly k tečně má patu na tečně vrcholové.
- Poloměr oskulační kružnice ve vrcholu paraboly je dvojnásobkem vzdálenosti ohniska od vrcholu.

Po narýsování oskulační kružnice ve vrcholu a tečen v nejnižších bodech graf snadno dokreslíme pomocí křivítka.

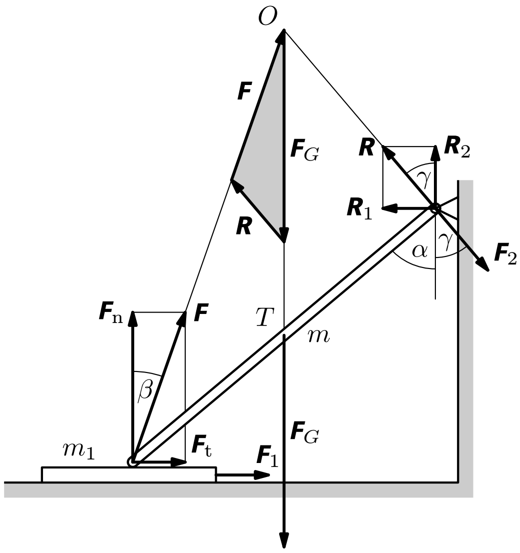


Obr. R3

2. a) Nejprve určíme všechny síly, které při pohybu desky působí na tyč. Jsou tři: tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$, síla $\boldsymbol{F}$ od desky a reakce $\boldsymbol{R}$ kloubu. Tyto síly jsou v rovnováze, jejich různoběžné vektorové přímky tedy procházejí týmž bodem O a vektorový součet sil je nulový – síly tvoří vektorový trojúhelník (obr. R4). Protože se povrch desky smýká po dolním konci tyče, platí pro velikosti tečné složky $\boldsymbol{F}_\mathrm{t}$ (třecí síly) a normálové složky $\boldsymbol{F}_\mathrm{n}$ síly $\boldsymbol{F}$

$$F_\mathrm{t} = fF_\mathrm{n} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{F_\mathrm{t}}{F_\mathrm{n}} = \mathrm{tg}\,\beta,$$

kde β je odchylka síly $\boldsymbol{F}$ od svislého směru.



Obr. R4

Délku tyče označme l. Z momentové věty vzhledem ke kloubu plyne

$$F_G\frac{l}{2}\sin\alpha + F_\mathrm{t}l\cos\alpha - F_\mathrm{n}l\sin\alpha = mg\frac{l}{2}\sin\alpha + fF_\mathrm{n}l\cos\alpha - F_\mathrm{n}l\sin\alpha = 0,$$

$$F_\mathrm{n} = \frac{mg\sin\alpha}{2(\sin\alpha - f\cos\alpha)}.$$

Úloze vyhovuje pouze kladný výsledek $F_\mathrm{n} > 0$. Aby mohlo dojít k pohybu desky, musí být tedy splněna podmínka

$$\sin\alpha > f\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tg}\,\alpha > f = \mathrm{tg}\,\beta,$$

jinak dojde ke vzpěru a desku neuvedeme do pohybu ke stěně sebevětší silou, dokud nedojde k deformaci tyče. **3 body**

Je-li podmínka $\mathrm{tg}\,\alpha > f$ splněna, posuneme desku ke stěně rovnoměrným pohybem působením síly o velikosti

$$F_1 = F_\mathrm{t} = \frac{mgf\sin\alpha}{2(\sin\alpha - f\cos\alpha)}.$$

Pro vodorovnou a svislou složku reakce kloubu $\boldsymbol{R}$ plyne z podmímek rovnováhy

$$R_1 = F_\mathrm{t}, \qquad R_2 = mg - F_\mathrm{n}.$$

Z toho určíme její velikost R a odchylku γ od svislého směru:

$$R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2}, \qquad \mathrm{tg}\,\gamma = \frac{R_1}{R_2}.$$

Podle principu akce a reakce působí tyč na kloub silou $\boldsymbol{F}_2 = -\boldsymbol{R}$.
Pro dané hodnoty vychází $\beta = 19{,}3° < \alpha$, $F_\mathrm{n} = 69{,}4$ N,
$F_1 = F_\mathrm{t} = R_1 = 24{,}3$ N, $R_2 = 28{,}7$ N, $R = F_2 = 37{,}6$ N, $\gamma = 40{,}3°$.
2 body

b) Vyjdeme z obr. R5 a postupujeme obdobně jako v a). Podle momentové věty vzhledem ke kloubu je

$$F_G\frac{l}{2}\sin\alpha - F_\mathrm{t}l\cos\alpha - F_\mathrm{n}l\sin\alpha = mg\frac{l}{2}\sin\alpha - fF_\mathrm{n}l\cos\alpha - F_\mathrm{n}l\sin\alpha = 0,$$

$$F_\mathrm{n} = \frac{mg\sin\alpha}{2(\sin\alpha + f\cos\alpha)},$$

$$F_3 = F_\mathrm{t} = R_1 = \frac{mgf\sin\alpha}{2(\sin\alpha + f\cos\alpha)}.$$

$$R_2 = mg - F_\mathrm{n}, \qquad R = F_4 = \sqrt{R_1^2 + R_2^2}, \qquad \mathrm{tg}\,\gamma = \frac{R_1}{R_2}.$$

Pro dané hodnoty vychází $F_\mathrm{n} = 37{,}9$ N,
$F_3 = F_\mathrm{t} = R_1 = 13{,}3$ N, $R_2 = 60{,}2$ N, $R = F_4 = 61{,}6$ N, $\gamma = 12{,}4°$.
3 body

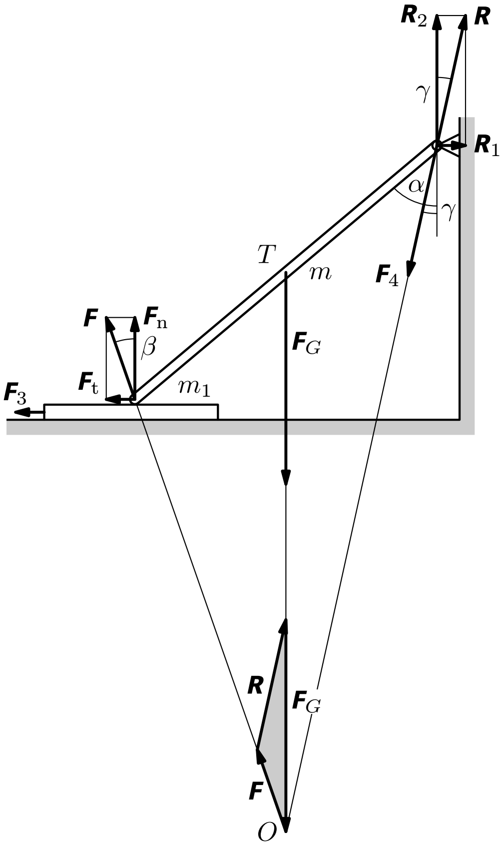
c) Při posouvání musíme navíc překonávat sílu tření mezi deskou a vodorovnou rovinou, takže

$$F_1' = F_1 + f_1(m_1 g + F_\mathrm{n}) = 33{,}2\ \mathrm{N} \quad \text{při posouvání ke stěně,}$$

$$F_3' = F_3 + f_1(m_1 g + F_\mathrm{n}) = 19{,}0\ \mathrm{N} \quad \text{při posouvání od stěny.}$$

Síla, kterou působí tyč na kloub, se nezmění.

2 body



Obr. R5

3. a) Nejprve užitím stavové rovnice určíme teploty:

$$T_2 = T_3 = 3T_1, \qquad T_4 = 2T_1.$$

1 bod

Děj 1-2 je izochorické ohřátí. Práce je nulová, musíme dodat teplo

$$Q_{12} = U_2 - U_1 = \frac{5}{2}nR(T_2 - T_1) = 5nRT_1 = 12{,}47\ \text{kJ}.$$

Děj 2-3 je izotermická expanze. Dodané teplo se rovná vykonané práci:

$$Q_{23} = W'_{23} = 3nRT_1 \ln 2 = 5{,}19\ \text{kJ}.$$

Děj 3-4 je izochorické ochlazení. Práce je nulová. Plyn odevzdá teplo

$$Q'_{34} = U_3 - U_4 = \frac{5}{2}nR(T_3 - T_4) = \frac{5}{2}nRT_1 = 6{,}24\ \text{kJ}.$$

Děj 4-1 je izobarické ochlazení. Plyn odevzdá teplo

$$Q'_{41} = \frac{7}{2}nR(T_4 - T_1) = \frac{7}{2}nRT_1 = 8{,}73\ \text{kJ}$$

a spotřebuje práci

$$W_{41} = p_1(V_4 - V_1) = nR(T_4 - T_1) = nRT_1 = 2{,}49\ \text{kJ}.$$

3 body

Účinnost cyklu je

$$\eta = \frac{W'_{23} - W_{41}}{Q_{12} + Q_{23}} = \frac{3nRT_1 \ln 2 - nRT_1}{5nRT_1 + 3nRT_1 \ln 2} = \frac{3\ln 2 - 1}{5 + 3\ln 2} = 15{,}2\ \%.$$

1 bod

b) Určíme teploty:

$$T_2 = 3T_1, \quad T_4 = 2T_1, \quad T_3(2V_1)^{\varkappa-1} = T_2 V_1^{\varkappa-1} \quad \Rightarrow \quad T_3 = \frac{3T_1}{2^{\varkappa-1}}.$$

1 bod

Děj 1-2 je izochorické ohřátí. Práce je nulová, musíme dodat teplo

$$Q_{12} = U_2 - U_1 = \frac{5}{2}nR(T_2 - T_1) = 5nRT_1 = 12{,}47\ \text{kJ}.$$

Děj 2-3 je adiabatická expanze. Teplo je nulové, vykonaná práce je rovna úbytku vnitřní energie:

$$W'_{23} = U_2 - U_3 = \frac{5}{2}nR(T_2 - T_3) = \frac{5}{2}nRT_1\left(3 - \frac{3}{2^{\varkappa-1}}\right) = 4{,}53\ \text{kJ}.$$

Děj 3-4 je izochorické ochlazení. Práce je nulová. Plyn odevzdá teplo

$$Q'_{34} = U_3 - U_4 = \frac{5}{2}nR(T_3 - T_4) = \frac{5}{2}nRT_1\left(\frac{3}{2^{\varkappa-1}} - 2\right) = 1{,}71\ \mathrm{kJ}.$$

Děj 4-1 je izobarické ochlazení. Plyn odevzdá teplo

$$Q'_{41} = \frac{7}{2}nR(T_4 - T_1) = \frac{7}{2}nRT_1 = 8{,}73\ \mathrm{kJ}$$

a spotřebuje práci

$$W_{41} = p_1(V_4 - V_1) = nR(T_4 - T_1) = nRT_1 = 2{,}49\ \mathrm{kJ}.$$

3 body

Účinnost cyklu je

$$\eta = \frac{W'_{23} - W_{41}}{Q_{12}} = \frac{\frac{5}{2}nRT_1\left(3 - \frac{3}{2^{\varkappa-1}}\right) - nRT_1}{5nRT_1} = \\ = \frac{\frac{5}{2}\left(3 - \frac{3}{2^{\varkappa-1}}\right) - 1}{5} = 16{,}3\ \%.$$

1 bod

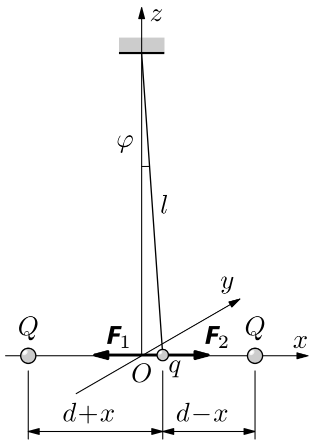
4. a) Zvolme souřadnicovou soustavu podle obr. R6. Na zavěšenou kuličku působí odpudivé elektrické síly $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ od pevných kuliček a síla tíhová $\boldsymbol{F}_G$.

Vychýlíme-li zavěšenou kuličku nepatrně ve směru osy x, působí sily $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ prakticky vodorovným směrem a pro souřadnici výsledné elektrické síly platí

$$F_\mathrm{e} \approx \frac{kQq}{(d+x)^2} - \frac{kQq}{(d-x)^2} =$$

$$\frac{kQq}{d^2\left(1+\dfrac{x}{d}\right)^2} - \frac{kQq}{d^2\left(1-\dfrac{x}{d}\right)^2} \approx$$

$$\approx \frac{kQq}{d^2}\left[1 - 2\frac{x}{d} - \left(1 + 2\frac{x}{d}\right)\right] = -\frac{4kQq}{d^3}x.$$



Obr. R6

Výsledná elektrická síla tedy směřuje zpět do rovnovážné polohy zavěšené kuličky. Totéž platí o pohybové složce tíhové síly, jejíž velikost je $\dfrac{mg}{l}x$. Ve směru osy x je tedy rovnovážná poloha zavěšené kuličky stabilní. Celková síla působící na zavěšenou kuličku má x-ovou souřadnici

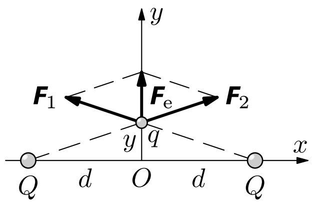
$$F_x = -\left(\frac{4kQq}{d^3} + \frac{mg}{l}\right)x. \qquad (11)$$

Ostatní souřadnice celkové síly jsou prakticky nulové.

3 body

Vychýlíme-li kuličku nepatrně ve směru osy y, pak podle obr. R7 (pohled shora) pro souřadnici výsledné elektrické síly platí

$$F_\mathrm{e} = 2\frac{kQq}{(d^2+y^2)} \cdot \frac{y}{d} \approx \frac{2kQq}{d^3}y.$$



Obr. R7

Proti elektrické síle působí pohybová složka tíhové síly, která směřuje do rovnovážné polohy. Celková síla působící na kuličku má y-ovou souřadnici

$$F_y \approx -\left(\frac{mg}{l} - \frac{2kQq}{d^3}\right)y. \qquad (12)$$

Ostatní souřadnice celkové síly jsou opět prakticky nulové.

Má-li být rovnovážná poloha zavěšené kuličky stabilní i ve směru osy y, musí platit

$$\frac{F_y}{y} < 0 \quad \Rightarrow \quad m > \frac{2kQql}{gd^3}.$$

Pro dané hodnoty vychází $m > 2{,}55$ mg, což je splněno.

3 body

b) V obou případech je celková síla působící na zavěšenou kuličku přímo úměrná výchylce z rovnovážné polohy a má opačný směr, jsou tedy splněny podmínky pro vznik harmonických kmitů. Ve směru osy x je úhlová frekvence

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}, \quad \text{kde podle (11) je} \quad K = \left(\frac{4kQq}{d^3} + \frac{mg}{l}\right).$$

Kyvadélko kývá s periodou

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4kQq}{md^3} + \frac{g}{l}}} = 0{,}69 \text{ s}.$$

Ve směru osy y je úhlová frekvence

$$\omega = \sqrt{\frac{L}{m}}, \quad \text{kde podle (12) je} \quad L = \left(\frac{mg}{l} - \frac{2kQq}{d^3}\right).$$

Kyvadélko kývá s periodou

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l} - \frac{2kQq}{md^3}}} = 0{,}83 \text{ s}.$$

4 body

5. a) V sériovém obvodu protéká oběma žárovkami proud $I_1 = \dfrac{U_e}{R_i + 2R}$.

V paralelním obvodu je celkový proud zdroje $I = \dfrac{U_e}{R_i + 0{,}5R}$ a každou žárovkou protéká proud

$$I_2 = \frac{U_e}{2(R_i + 0{,}5R)} = \frac{U_e}{2R_i + R}.$$

Protože žárovky svítí v obou případech stejně, je $I_1 = I_2$. Proto

$$R_i + 2R = 2R_i + R \quad \Rightarrow \quad R = R_i.$$

3 body

b) V sériovém zapojení je účinnost obvodu $\eta = \dfrac{2R}{2R + R_i} = \dfrac{2}{3} \approx 67$ %. V paralelním zapojení je účinnost obvodu $\eta = \dfrac{0{,}5R}{0{,}5R + R_i} = \dfrac{1}{3} \approx 33$ %, tedy poloviční.

2 body

c) Úlohu c) vyřešíme graficky. V sériovém obvodu se dvěma žárovkami vzniká na vnitřním odporu zdroje úbytek napětí $U_e - 2U_ž$ a žárovkami prochází proud

$$I_s = \frac{U_e - 2U_ž}{R_i}. \tag{13}$$

V paralelním obvodu se dvěma žárovkami vzniká na vnitřním odporu zdroje úbytek napětí $U_e - U_ž$ a žárovkami prochází proud

$$I_p = \frac{U_e - U_ž}{2R_i}. \tag{14}$$

Rovnice (13) a (14) vyjadřují proud žárovkou jako funkce napětí, které jsou na obr. R8 zobrazeny úsečkami s_1 a p_1. Podle zadání úlohy musí obě rovnice platit současně, proto průsečík obou grafů – bod A o souřadnicích $U_ž = U_e/3$, $I_ž = U_e/(3R_i)$ – leží na voltampérové charakteristice žárovky popsané funkci $I_ž = f(U_ž)$. V sériovém obvodu se třemi žárovkami vzniká na vnitřním odporu zdroje úbytek napětí $U_e - 3U_ž$ a žárovkami prochází proud

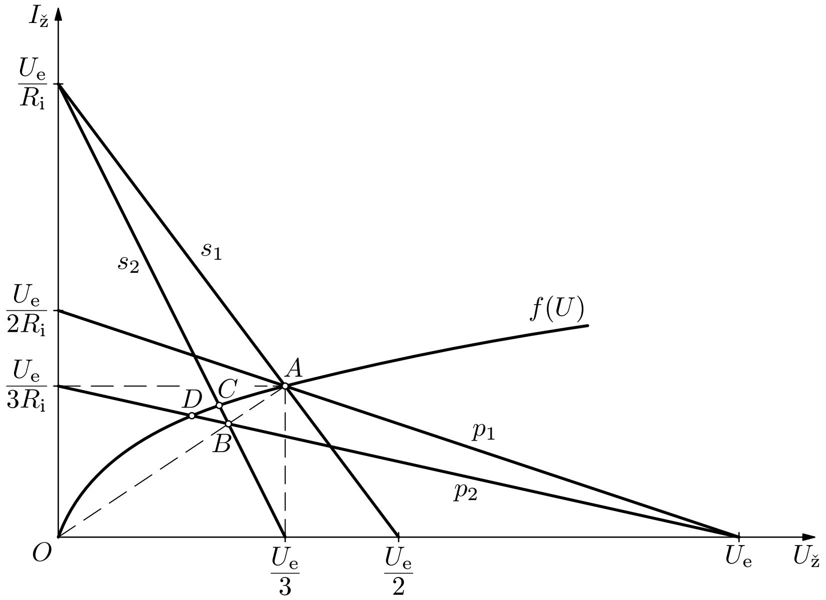
$$I_s = \frac{U_e - 3U_ž}{R_i}. \tag{15}$$

V paralelním obvodu se třemi žárovkami vzniká na vnitřním odporu zdroje úbytek napětí $U_e - U_ž$ a žárovkami prochází proud

$$I_p = \frac{U_e - U_ž}{3R_i}. \tag{16}$$

Funkce popsané rovnicemi (15) a (16) jsou na obr. R8 znázorněny úsečkami s_2 a p_2, které se protínají v bodě B ležícím uvnitř úsečky OA. Jejich průsečíky C a D s voltampérovou charakteristikou určují hodnoty napětí na žárovkách a proudu procházejícího žárovkami v obou případech. Je zřejmé, že v sériovém zapojení (bod C) budou žárovky svítit více než v zapojení paralelním (bod D).

5 bodů



Obr. R8

6. *Odvození teoretických vztahů*

Sjednotíme znaménkovou konvenci pro zobrazení zrcadlem a pro zobrazení čočkou. Oba poloměry kulových ploch budeme brát jako kladné veličiny. Optická mohutnost čočky pak je

$$\varphi = \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right).$$

Optická mohutnost prvního rozhraní ve funkci zrcadla je

$$\varphi_1 = \frac{1}{f_1} = \frac{2}{r_1}$$

a optická mohutnost druhého rozhraní jako zrcadla doplněného dvojím průchodem paprsků čočkou je

$$\varphi_2 = \frac{1}{f_2} = \frac{2}{r_2} + 2\varphi = \frac{2}{r_2} + \frac{2}{f}.$$

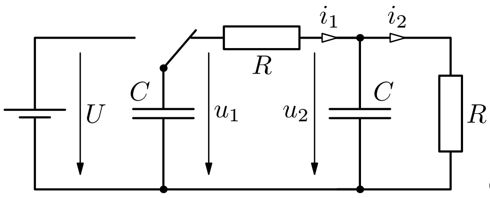
Řešením této soustavy rovnic dojdeme ke vztahům

$$r_1 = 2f_1, \qquad r_2 = \frac{2f_2 f}{f - 2f_2}, \qquad n = \frac{f(f_1 - f_2)}{f(f_1 - f_2) - 2f_1 f_2}.$$

7. Označme i_1, i_2 okamžité hodnoty proudů, které procházely rezistory (obr. R9). Okamžité hodnoty nábojů na kondenzátorech označme q_1, q_2. Platí

$$\mathrm{d}q_1 = C \cdot \mathrm{d}u_1 = -i_1 \mathrm{d}t = -\frac{u_1 - u_2}{R}\mathrm{d}t,$$

$$\mathrm{d}q_2 = C \cdot \mathrm{d}u_2 = (i_1 - i_2)\mathrm{d}t = \left(\frac{u_1 - u_2}{R} - \frac{u_2}{R}\right)\mathrm{d}t = \frac{u_1 - 2u_2}{R}\mathrm{d}t.$$



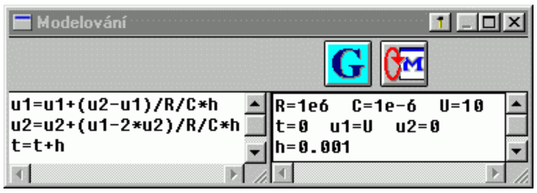
Obr. R9

Úpravou dostaneme vztahy

$$\mathrm{d}u_1 = \frac{u_2 - u_1}{RC}\mathrm{d}t, \qquad \mathrm{d}u_2 = \frac{u_1 - 2u_2}{RC}\mathrm{d}t,$$

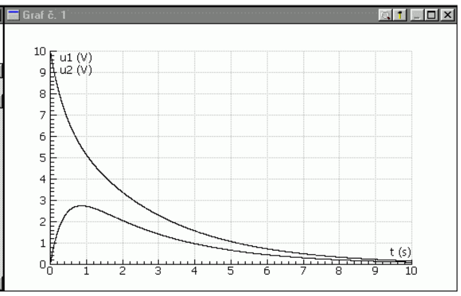
ze kterých můžeme vycházet při modelování děje Eulerovou metodou:

5 bodů



Tabulka č. 1

t s	u1 V	u2 V
0.857	5.506975	2.748456
0.858	5.504216	2.748463
0.859	5.501461	2.748468
0.860	5.498708	2.748470
0.861	5.495957	2.748469
0.862	5.493210	2.748465
0.863	5.490465	2.748458
0.864	5.487723	2.748449
0.865	5.484984	2.748437
0.866	5.482247	2.748423



Z tabulky a grafu vyčteme, že napětí u_2 dosáhlo maximální hodnoty 2,75 V v čase $t = 0{,}86$ s.

5 bodů

Poznámka: Analytickým řešením úlohy bychom dospěli k obecnému řešení

$$u_1 = U\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\mathrm{e}^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2RC}t} + U\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\mathrm{e}^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2RC}t}, \tag{1}$$

$$u_2 = \frac{U}{\sqrt{5}}\left(\mathrm{e}^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2RC}t} - \mathrm{e}^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2RC}t}\right). \tag{2}$$

Napětí u_2 dosáhlo maxima v čase

$$t = \frac{RC}{\sqrt{5}}\ln\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} \approx 0{,}8608RC.$$

Pro dané hodnoty je $t = 0{,}8608$ s. Dosazení do (2) dostaneme $u_{2\max} \approx 2{,}7493$ V.

Vidíme, že výsledek získaný Eulerovou metodou při časovém kroku 0,001 s se shoduje s přesný řešením na 3 platné číslice. Přesnější model získáme Rungovou–Kuttovou metodou 2. řádu:

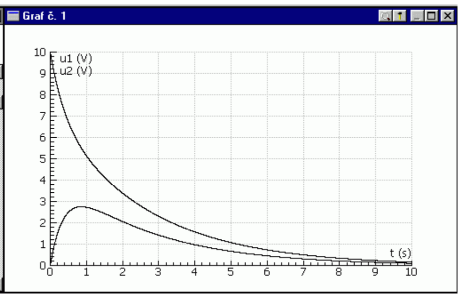
Modelování

```
ua=u1 ub=u2     'Metoda RK2
 k1=(u2-u1)/R/C
 m1=(u1-2*u2)/R/C
u1=ua+k1*2*h/3  u2=ub+m1*2*h/3
 k2=(u2-u1)/R/C
 m2=(u1-2*u2)/R/C
u1=ua+(k1+3*k2)*h/4
u2=ub+(m1+3*m2)*h/4
 t=t+h
```

```
R=1e6
C=1e-6
U=10
t=0
u1=U
u2=0
h=0.001
```

Tabulka č. 1

t s	u1 V	u2 V
0.856	5.511944	2.749300
0.857	5.509183	2.749312
0.858	5.506425	2.749321
0.859	5.503669	2.749327
0.860	5.500916	2.749331
0.861	5.498166	2.749332
0.862	5.495418	2.749330
0.863	5.492674	2.749325
0.864	5.489932	2.749318
0.865	5.487192	2.749308



Vzhledem k malé přesnosti zadaných hodnot však dobře vyhovuje i výsledek získaný Eulerovou metodou.