Řešení úloh 1. kola 51. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie C*

Autoři úloh: M. Jarešová (1, 2, 7), P. Šedivý (4, 5, 6) a J. Jírů (3).

1. a) Označme t_1 dobu pádu kamene, h výšku místa vrhu od vodní hladiny. Potom $h = v_0 t_1 + \frac{1}{2} g t_1^2$, v této hloubce kámen dopadne na vodní hladinu. Z místa dopadu se zvuk šíří rychlostí v_z. Proto můžeme napsat pro h také vztah $h = v_\mathrm{z}(t - t_1)$. Porovnáním těchto dvou vztahů pro h dostaneme rovnici

$$v_0 t_1 + \frac{1}{2} g t_1^2 = v_\mathrm{z}(t - t_1),$$

což je kvadratická rovnice, kterou můžeme přepsat do tvaru

$$\frac{1}{2} g t_1^2 + t_1(v_\mathrm{z} + v_0) - v_\mathrm{z} t = 0.$$

3 body

Fyzikální význam má pouze řešení, kdy je $t_1 > 0$. Na základě této úvahy pak pro dobu t_1 můžeme psát

$$t_1 = -\frac{v_\mathrm{z} + v_0}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_\mathrm{z} + v_0}{g}\right)^2 + \frac{2 v_\mathrm{z} t}{g}} = 4{,}80\ \mathrm{s}.$$

2 body

Hloubka, kam kámen dopadne od místa vrhu, je

$$h = v_\mathrm{z}(t - t_1) \doteq 140\ \mathrm{m}.$$

2 body

Poznámka

Ve skutečnosti se uvádí, že hloubka vody v propasti Machocha je asi 10 m, hloubka propasti je tedy asi 150 m.

b) Rychlost dopadu kamene na vodní hladinu je dána vztahem

$$v = v_0 + g t_1 = 52\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

3 body

2. a) Dráha uražená ve vyjeté stopě je dána vztahem

$$s_1 = \frac{1}{2}a_1 t_1^2 = \frac{v_1 t_1}{2}, \quad \text{z čehož} \quad v_1 = \frac{2s_1}{t_1} = 6{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} \doteq 22\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}.$$

1 bod

b) Označme a_2 velikost zrychlení (zpomalení) pohybu při jízdě v hlubokém sněhu, t_2 dobu pohybu od vjetí do hlubokého sněhu po dosažení poloviční rychlosti. Pak platí

$$\frac{v_1}{2} = v_1 - a_2 t_2, \quad \text{z čehož} \quad t_2 = \frac{v_1}{2a_2}.$$

Pro dráhu s_2 můžeme psát

$$s_2 = \frac{1}{2}\left(v_1 + \frac{v_1}{2}\right)\cdot t_2 = \frac{1}{2}\left(v_1 + \frac{v_1}{2}\right)\cdot \frac{v_1}{2a_2} = \frac{3}{8}\frac{v_1^2}{a_2},$$

z čehož

$$t_2 = \frac{4s_2}{3v_1} = \frac{2s_2 t_1}{3s_1}, \qquad a_2 = \frac{3v_1^2}{8s_2} = \frac{3s_1^2}{2s_2 t_1^2}.$$

V hlubokém sněhu urazí lyžař dráhu s_3 za dobu t_3. Platí $t_3 = \dfrac{v_1}{a_2} = 2t_2$. Potom

$$s_3 = \frac{v_1 t_3}{2} = v_1 t_2 = \frac{v_1^2}{2a_2} = \frac{4}{3}s_2.$$

Celková doba pohybu lyžaře byla $t = t_1 + t_3 = t_1 + \dfrac{4s_2 t_1}{3s_1} = 34\ \mathrm{s}.$

Celková dráha byla $s = s_1 + s_3 = s_1 + \dfrac{4}{3}s_2 = 102\ \mathrm{m}.$

4 body

c) Ve vyjeté stopě byla pohybová složka tíhové síly lyžaře větší než odporová třecí síla, v hlubokém sněhu naopak. Podle 2. Newtonova pohybového zákona platilo

$$ma_1 = mg\sin\alpha - f_1 mg\cos\alpha, \qquad ma_2 = f_2 mg\cos\alpha - mg\sin\alpha.$$

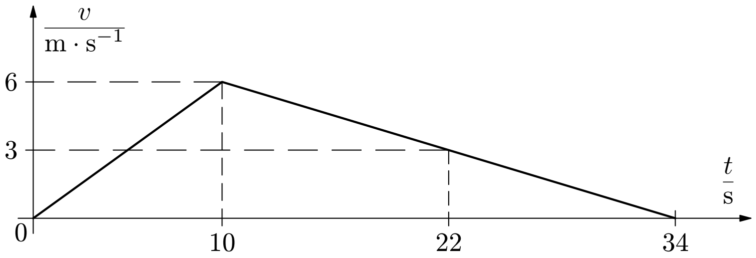
Z toho

$$f_1 = \frac{g\sin\alpha - a_1}{g\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha - \frac{a_1}{g\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha - \frac{2s_1}{gt_1^2\cos\alpha} \doteq 0{,}15,$$

$$f_2 = \frac{g\sin\alpha + a_2}{g\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha + \frac{a_2}{g\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha + \frac{3s_1^2}{2gs_2t_1^2\cos\alpha} \doteq 0{,}24.$$

3 body

d) Graf závislosti rychlosti na čase je na obr. R1.



Obr. R1 **2 body**

3. a) Zvolme počátek soustavy souřadnic v místě vrhu, osu x vodorovně a osu y svisle vzhůru. Pak y-ová složka rychlosti závisí na čase podle rovnice

$$v_y = v_{01}\sin\alpha_1 - gt.$$

Z podmínky $v_y = 0$ v čase $t = \dfrac{t_1}{2}$ plyne

$$v_{01} = \frac{gt_1}{2\sin\alpha_1} = 15{,}7\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}. \qquad (1)$$

2 body

Závislost x-ové souřadnice míčku na čase je dána rovnicí $x = v_{01}t\cos\alpha_1$. V čase $t = t_1$ je $x = d$. Po dosazení je délka vrhu a tedy vzdálenost chlapců

$$d = v_{01}t_1\cos\alpha_1.$$

Užitím rovnice (1) dostaneme

$$d = \frac{gt_1^2}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha_1} = 21{,}7\ \mathrm{m}. \qquad (2)$$

2 body

b) Pro jednoduchost při druhém hodu umístíme počátek soustavy souřadnic do místa druhého vrhu a osu x orientujeme opačně. Pro složky rychlosti platí:

$$v_x = v_{02}\cos\alpha_2, \qquad v_y = v_{02}\sin\alpha_2 - gt.$$

Označme t_2 dobu letu. V čase $t = \dfrac{t_2}{2}$ je $v_y = 0$, tedy z rovnice dostaneme

$$v_{02}\sin\alpha_2 = g\frac{t_2}{2} \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{2v_{02}\sin\alpha_2}{g}.$$

Dále platí $d = v_{02}\cos\alpha_2\cdot t_2 = \dfrac{2v_{02}^2\sin\alpha_2\cos\alpha_2}{g} = \dfrac{v_{02}^2}{g}\sin 2\alpha.$

Užitím vztahu (2) dostaneme

$$\sin 2\alpha_2 = \frac{g^2t_1^2}{2v_{02}^2\,\mathrm{tg}\,\alpha_1} \qquad \left(\text{případně } \alpha_2 = \frac{1}{2}\arcsin\frac{g^2t_1^2}{2v_{02}^2\,\mathrm{tg}\,\alpha_1}\right).$$

Pro $\alpha_2 \in \langle 0; 90^\circ\rangle$ má rovnice dvě řešení: $\alpha_2 = 24^\circ$, $\alpha_2' = 66^\circ$.

4 body

c) Z rovnice $\dfrac{1}{2}mv_{03}^2 = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}mv_{02}^2$ plyne $v_{03} = \dfrac{v_{02}}{\sqrt{2}}$.

Hledaný úhel musí splňovat podmínku

$$\sin 2\alpha_3 = \frac{g^2t_1^2}{2v_{03}^2\,\mathrm{tg}\,\alpha_1} = \frac{g^2t_1^2}{v_{02}^2\,\mathrm{tg}\,\alpha_1} = 2\sin 2\alpha_2.$$

Po dosazení číselných hodnot zjistíme, že úloha nemá řešení, tedy velikost počáteční rychlosti je příliš malá na to, aby míček doletěl k Martinovi.

2 body

4. Teplota v kalorimetru začne rovnoměrně stoupat v čase τ_0, kdy roztaje všechen led. Z hodnot uvedených v zadání můžeme sestrojit graf (obr. R2). Z podobnosti trojúhelníků v grafu plyne

$$\frac{\tau_1 - \tau_0}{\tau_2 - \tau_0} = \frac{t_1}{t_2} \quad \Rightarrow \quad \tau_0 = \frac{\tau_1 t_2 - \tau_2 t_1}{t_2 - t_1} = 8{,}52\ \text{min} = 511\ \text{s}.$$

3 body

Energetická bilance tání ledu je

$$m l_\text{t} = P\tau_0 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{P\tau_0}{l_\text{t}} = 0{,}077\ \text{kg}.$$

3 body

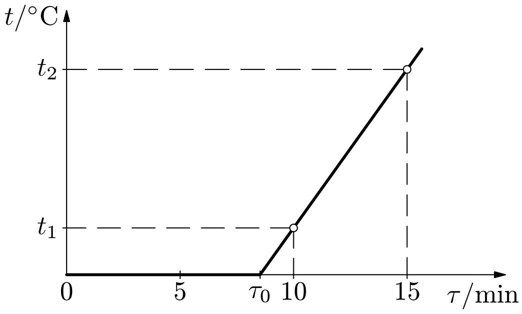
Energetická bilance následného zahřívání je

$$[(m + M)c + C_\text{k}]\, t_2 = P(\tau_2 - \tau_0).$$

Z toho

$$M = \frac{P(\tau_2 - \tau_0) - C_\text{k} t_2}{c t_2} - m = 0{,}247\ \text{kg}.$$

4 body



Obr. R2

5. a) Na jednu elementární buňku železa α (obr. R3) připadají 2 atomy $\left(8 \cdot \frac{1}{8} + 1\right)$.
Hustota železa α je tedy

$$\varrho_1 = \frac{2m_\mathrm{a}}{a_1^3},$$

kde m_a je hmotnost atomu železa a a_1 mřížkový parametr železa α.
Na elementární buňku železa γ (obr. R4) připadají 4 atomy $\left(8 \cdot \frac{1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{2}\right)$.
Hustota železa γ je

$$\varrho_2 = \frac{4m_\mathrm{a}}{a_2^3},$$

kde a_2 mřížkový parametr železa γ. Porovnáním obou vztahů dostaneme

$$\frac{4a_1^3}{2a_2^3} = \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \approx 0{,}98, \qquad \frac{a_2}{a_1} \approx \sqrt[3]{\frac{2}{0{,}98}} = 1{,}27.$$

Mřížkový parametr se zvětší asi o 27 %.

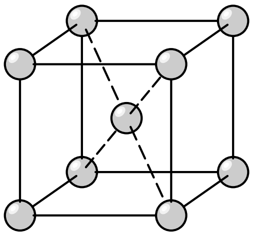
5 bodů

b) Vzdálenost středů sousedních iontů v železe α je rovna polovině délky tělesové úhlopříčky elementární buňky. U železa γ je to polovina stěnové úhlopříčky. Tedy

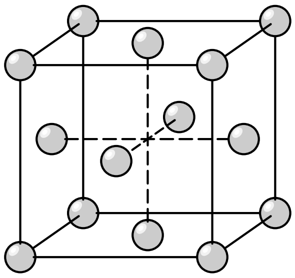
$$\frac{s_2}{s_1} = \frac{\frac{a_2\sqrt{2}}{2}}{\frac{a_1\sqrt{3}}{2}} = \frac{a_2}{a_1}\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 1{,}04.$$

Vzdálenost sousedních iontů se při rekrystalizaci zvětší asi o 4 %.

5 bodů



Obr. R3



Obr. R4

7. a) Podle Archimedova zákona platí

$$\frac{V}{3}\varrho_1 g + \frac{2V}{3}\varrho_2 g = \varrho_3 V g,$$

z čehož

$$\varrho_3 = \frac{1}{3}(\varrho_1 + 2\varrho_2) = 807\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}.$$

2 body

b) Označme $V' = \dfrac{m}{\varrho_4}$ objem mosazného tělíska. Platí

$$\frac{V}{2}\varrho_1 g + \frac{V}{2}\varrho_2 g + V'\varrho_2 g = \frac{V}{2}\varrho_1 g + \frac{V}{2}\varrho_2 g + \frac{m}{\varrho_4}\varrho_2 g = V\varrho_3 g + mg,$$

z čehož

$$m = \frac{\left[\frac{1}{2}(\varrho_1 + \varrho_2) - \varrho_3\right] V}{1 - \frac{\varrho_2}{\varrho_4}} = \frac{(\varrho_1 - \varrho_2)V}{6\left(1 - \frac{\varrho_2}{\varrho_4}\right)} = 5{,}3\ \mathrm{g}.$$

3 body

c) Označme V_1 objem části válce, která je ve vodě. Obdobně jako v úloze a) platí

$$V_1\varrho_1 g + \frac{V}{3}\varrho_2 g = V\varrho_3 g,$$

z čehož

$$V_1 = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right) V = \frac{171}{300}V = 0{,}57\,V = 57\ \mathrm{cm^3}.$$

Na vzduchu je $V_3 = V - \frac{1}{3}V - \frac{171}{300}V = 0{,}097V \doteq 10\ \mathrm{cm^3}$.

3 body

d) V tomto případě je ve vodě část válce o objemu V_1', který určíme z rovnice

$$V_1'\varrho_1 g = V\varrho_3 g,$$

z čehož

$$V_1' = \frac{\varrho_3}{\varrho_1}V = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2\varrho_2}{\varrho_1}\right) V = 0{,}807\,V \doteq 81\ \mathrm{cm^3}.$$

1 bod

e) Protože $\varrho_3 > \varrho_2$, znamená to, že se dřevěný válec celý potopí ke dnu.

1 bod