Řešení úloh krajského kola 51. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie B

Autorka úloh: M. Jarešová

1. a) Vyjdeme z obr. R1. Ze zákona zachování energie plyne

$$k = \frac{v'}{v} = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{2gh_0}} = \sqrt{\frac{h}{h_0}} = 0{,}80.$$

3 body

b) Podrobně rozkreslený pohyb míčku je znázorněn na obr. R2. Ze zákona zachování energie plyne

$$v_6^2 = 2gH, \qquad v_5^2 = \frac{v_6^2}{k^2}, \qquad v_4^2 = v_5^2 - 2gH = 2gH\left(\frac{1}{k^2} - 1\right),$$

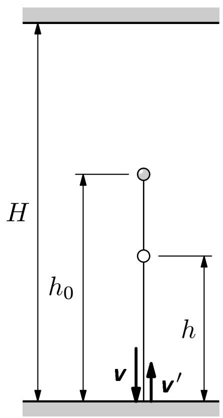
$$v_3^2 = \frac{v_4^2}{k^2} = 2gH\left(\frac{1}{k^4} - \frac{1}{k^2}\right), \qquad v_2^2 = v_3^2 + 2gH = 2gH\left(\frac{1}{k^4} - \frac{1}{k^2} + 1\right),$$

$$v_1^2 = \frac{v_2^2}{k^2} = 2gH\left(\frac{1}{k^6} - \frac{1}{k^4} + \frac{1}{k^2}\right),$$

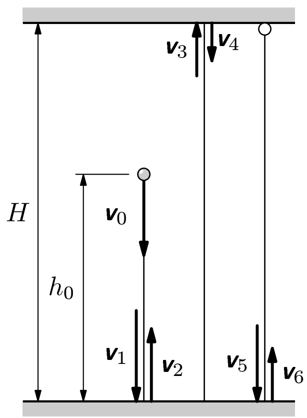
$$v_0^2 = v_1^2 - 2gh_0 = 2g\left[H\left(\frac{1}{k^6} - \frac{1}{k^4} + \frac{1}{k^2}\right) - h_0\right],$$

$$v_0 = \sqrt{2g\left[H\left(\frac{1}{k^6} - \frac{1}{k^4} + \frac{1}{k^2}\right) - h_0\right]} = 10{,}7\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

7 bodů



Obr.R1



Obr. R2

2. a) Celkové prodloužení pružin při působení síly o velikosti F je

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} = \frac{F}{k}.$$

Z toho $$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{1}{k}.$$ **1 bod**

Pro doby kmitů závaží na pružinách platí

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}}, \qquad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_2}}.$$

Pro dobu kmitu pružin zavěšených pod sebou platí

$$T_3 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{m\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)}.$$

Pak $$T_3^2 = \frac{4\pi^2 m}{k} = \frac{4\pi^2 m}{k_1} + \frac{4\pi^2 m}{k_2} = T_1^2 + T_2^2.$$ **2 body**

Dále platí

$$T_1 = \frac{3}{4}T_2, \qquad T_3^2 = \frac{9}{16}T_2^2 + T_2^2 = \frac{25}{16}T_2^2,$$

$$T_2 = \frac{4}{5}T_3 = 1{,}20\ \mathrm{s}, \qquad T_1 = \frac{3}{5}T_3 = 0{,}90\ \mathrm{s}.$$

$$k_1 = \frac{4\pi^2 m}{T_1^2} = \frac{100\pi^2 m}{9T_3^2} = 24{,}4\ \mathrm{N\cdot m^{-1}},\ k_2 = \frac{4\pi^2 m}{T_2^2} = \frac{25\pi^2 m}{4T_3^2} = 13{,}7\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}.$$

2 body

b) Po zavěšení závaží je první pružina napínána silou o velikosti $F_1 = k_1\Delta l$, druhá pružina silou $F_2 = k_2\Delta l$, dále pak platí $F_1 x = F_2(d - x)$, po dosazení $k_1\Delta l x = k_2\Delta l(d - x)$, z čehož $x = \dfrac{k_2}{k_1 + k_2}d = 7{,}2$ cm.

2 body

Z rovnosti $F_G = mg = k\Delta l = F_1 + F_2 = (k_1 + k_2)\Delta l$

plyne $k = k_1 + k_2, \qquad \Delta l = \dfrac{mg}{k_1 + k_2} = 12{,}9$ cm. **1 bod**

c) Pro dobu kmitu závaží na obr. 2 platí $T_4 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_1 + k_2}} = 0{,}72$ s.

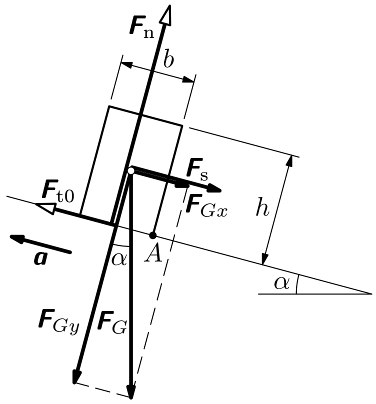
1 bod

Ze vztahů pro T_4, T_1 a T_2 plyne

$$\frac{1}{T_4^2} = \frac{k}{4\pi^2 m} = \frac{k_1 + k_2}{4\pi^2 m} = \frac{k_1}{4\pi^2 m} + \frac{k_2}{4\pi^2 m} = \frac{1}{T_1^2} + \frac{1}{T_2^2}.$$

z čehož $$\frac{1}{T_4^2} = \frac{1}{T_1^2} + \frac{1}{T_2^2}.$$ **1 bod**

3. a) Rozjezd: úlohu budeme řešit v soustavě spojené s korbou automobilu. Na těleso stále působí síla tíhová $\boldsymbol{F}_{\mathrm{G}}$ a kolmá tlaková síla $\boldsymbol{F}_{\mathrm{n}}$ od korby. Při rozjezdu působí na náklad třecí síla klidového tření $\boldsymbol{F}_{\mathrm{t0}}$ a setrvačná síla $\boldsymbol{F}_{\mathrm{s}} = -m\boldsymbol{a}$ (obr. R3).



Obr. R3

Nejprve stanovíme mezní zrychlení $\boldsymbol{a}_1$, aby nedocházelo k pohybu nákladu smykem. Podle obr. R3 platí

$$F_{Gy} = mg\cos\alpha,$$

$$F_{Gx} = mg\sin\alpha,$$

$$F_{\mathrm{t0}} = f_0 F_{\mathrm{n}}.$$

Z podmínky rovnováhy ve směru kolmém na ložnou plochu plyne

$$F_{\mathrm{n}} = mg\cos\alpha.$$

Z podmínky rovnováhy ve směru rovnoběžném s ložnou plochou dostaneme

$$-ma_1 - mg\sin\alpha + mgf_0\cos\alpha = 0,$$

z čehož

$$a_1 = (f_0\cos\alpha - \sin\alpha)g.$$

Dále určíme podmínku, aby nedošlo k převrácení nákladu (došlo by k tomu kolem bodu A). Vzhledem k bodu A platí

$$mg\sin\alpha\cdot\frac{h}{2} - mg\cos\alpha\cdot\frac{b}{2} - (-ma_2)\cdot\frac{h}{2} = 0,$$

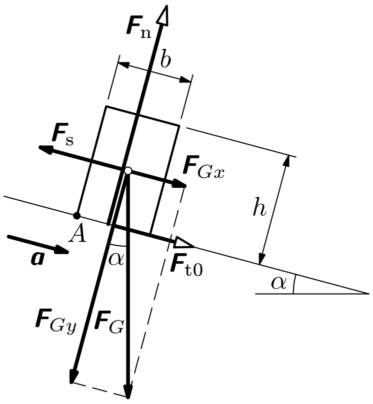
z čehož

$$a_2 = \left(\frac{b}{h}\cos\alpha - \sin\alpha\right)g.$$

Pro dané hodnoty:
1. když $f_0 = 0{,}4$ je $a_1 = 1{,}25\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $a_2 = 3{,}78\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, maximální hodnota zrychlení, aby náklad zůstal vůči korbě v klidu, je v tomto případě $a_{\max} = 1{,}25\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$;
2. když $f_0 = 0{,}7$ je $a_1 = 4{,}09\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $a_2 = 3{,}78\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, maximální hodnota zrychlení, aby náklad zůstal vůči korbě v klidu, je v tomto případě $a_{\max} = 3{,}78\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

5 bodů

b) Zpomalování: budeme řešit obdobně jako v úloze a), analogickou situaci znázorňuje obr. R4.



Obr. R4

Nejprve stanovíme mezní zrychlení $\boldsymbol{a}_1'$, aby nedocházelo k pohybu nákladu smykem. Obdobně jako v případě a) se zaměříme nejprve na situaci, aby nedocházelo ke smyku. Platí

$$-ma_1' + mg\sin\alpha + mgf_0\cos\alpha = 0,$$

z čehož

$$a_1' = (\sin\alpha + f_0\cos\alpha)g.$$

Aby nedošlo k převrácení nákladu musí platit

$$+mg\sin\alpha\cdot\frac{h}{2} + mg\cos\alpha\cdot\frac{b}{2} - ma_2'\cdot\frac{h}{2} = 0,$$

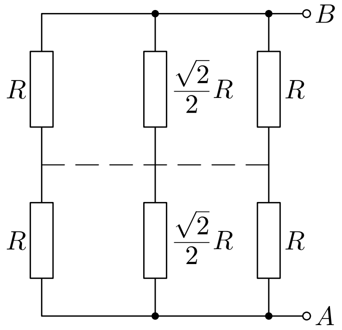
z čehož

$$a_2' = \left(\frac{b}{h}\cos\alpha + \sin\alpha\right)g.$$

Pro dané hodnoty:
1. když $f_0 = 0{,}4$ je $a_1' = 6{,}33\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $a_2' = 8{,}86\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, maximální hodnota zrychlení, aby náklad zůstal vůči korbě v klidu, je v tomto případě $a'_{\max} = 6{,}33\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$;
2. když $f_0 = 0{,}7$ je $a_1' = 9{,}17\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $a_2' = 8{,}86\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, maximální hodnota zrychlení, aby náklad zůstal vůči korbě v klidu, je v tomto případě $a'_{\max} = 8{,}86\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

5 bodů

4. a) Připojíme-li zdroj k bodům A a B, mají body E,S a F stejný potenciál. Můžeme tedy spoje ES a SF vypustit, protože jimi neprochází žádný proud. Nakreslíme náhradní schéma zapojení (obr. R5).



Obr. R5

Platí

$$\frac{1}{R_{\mathrm{AB}}} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{R\sqrt{2}} + \frac{1}{2R},$$

z čehož

$$R_{\mathrm{AB}} = (2-\sqrt{2})R = 0{,}59R.$$

2 body

b) Vzhledem k symetrii můžeme větve ASF a ESB v bodě S od sebe oddělit a nakreslit náhradní schéma zapojení (obr. R6). Dostaneme dvě paralelně spojené větve o stejném odporu R''. Platí

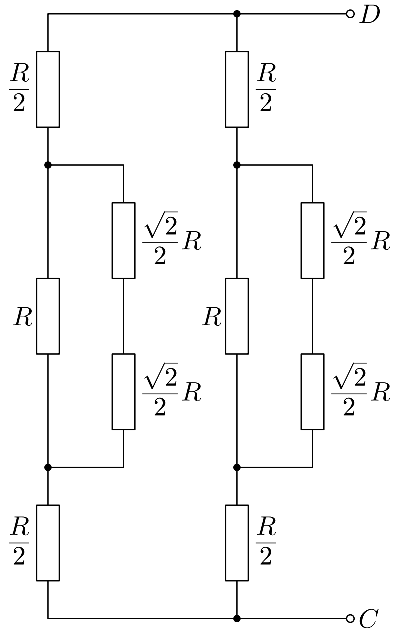
$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R\sqrt{2}},$$

z čehož $R' = (2-\sqrt{2})R$. Potom

$$R'' = \frac{R}{2} + (2-\sqrt{2})R + \frac{R}{2} = (3-\sqrt{2})R,$$

z čehož

$$R_{\mathrm{CD}} = \frac{R''}{2} = \frac{3-\sqrt{2}}{2} = 0{,}79R.$$

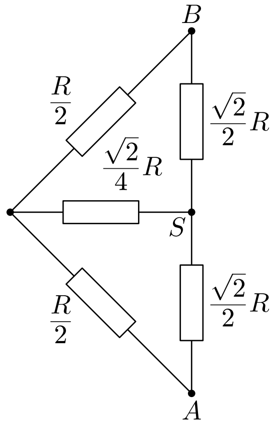


Obr. R6

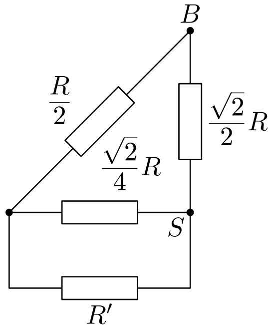
3 body

c) „Překlopíme“ pravou část obvodu podle osy souměrnosti AB doleva. Paralelní kombinací rezistorů R, R dostaneme $\frac{R}{2}$; paralelní kombinací rezistorů o odporu $\frac{\sqrt{2}}{2}R$, $\frac{\sqrt{2}}{2}R$ dostaneme $\frac{\sqrt{2}}{4}R$. Náhradní schéma takto vzniklého obvodu je uvedeno na obr. R7. Toto náhradní schéma dále překreslíme dle obr. R8. Velikost odporu R' z obr. R8 je dána vztahem

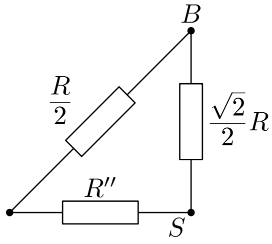
$$R' = \frac{R}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}R = \frac{\sqrt{2}+1}{2}R.$$



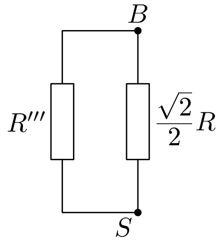
Obr. R7



Obr. R8



Obr. R9



Obr. R10

Dalším zjednodušením obvodu z obr. R8 vznikne obvod na obr. R9, kde velikost odporu R'' je dána vztahem $\frac{1}{R''} = \frac{1}{R'} + \frac{4}{R\sqrt{2}}$, z čehož po dosazení za R' a úpravě dostaneme

$$R'' = \frac{(\sqrt{2}+2)R}{2(3\sqrt{2}+2)}.$$

Tento obvod dále zjednodušíme dle obr. R10, kde $R''' = R'' + \frac{R}{2} = \frac{\sqrt{2}+4}{7}R$.

Nakonec můžeme psát $\frac{1}{R_{\mathrm{BS}}} = \frac{1}{R'''} + \frac{2}{\sqrt{2}R}$, z čehož

$$R_{\mathrm{BS}} = \frac{4-\sqrt{2}}{7} = 0{,}37R.$$

5 bodů