Řešení úloh 1. kola 51. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie A*

Autoři úloh: P. Šedivý (1, 4, 5, 6,), B. Vybíral (7),
2. a 3. úloha jsou převzaty z Moskevské FO.

1. a) Označme $\boldsymbol{u}'$ rychlost větru vzhledem k lodi. Její směr ukazuje vlajka na stožáru. Rychlost větru vzhledem k hladině jezera je vektorovým součtem rychlosti lodi a rychlosti větru vzhledem k lodi (obr. R1). Platí tedy

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}', \qquad \boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}.$$

3 body

Zvolme souřadnicovou soustavu podle obr. R1. Platí

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{u_y}{u_x - v}.$$

Obdobně po zvětšení velikosti rychlosti lodi na $2v$, kdy se odchylka vlajky zvětší na α_2, platí

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{u_y}{u_x - 2v}. \qquad (\operatorname{tg} \alpha_2 < 0.)$$

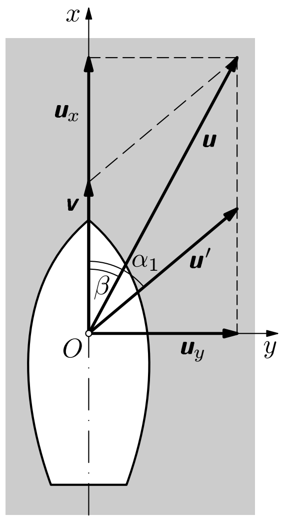
Řešením těchto rovnic dostaneme

$$\frac{u_x - v}{u_x - 2v} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1},$$

$$u_x = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 - 2 \operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2} v = 1{,}826v,$$

$$u_y = (u_x - v) \operatorname{tg} \alpha_1 = 0{,}985v.$$

Ze souřadnic rychlosti větru vypočítáme její velikost u a odchylku β od směru pohybu lodi:



Obr. R1

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = 2{,}07v = 41 \text{ km/h}, \qquad \beta = \operatorname{arctg} \frac{u_y}{u_x} = 28°.$$

5 bodů

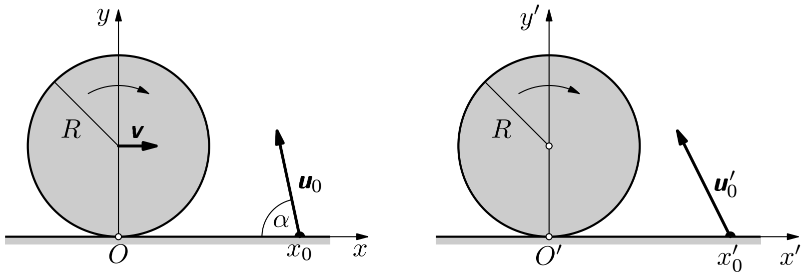
b) Aby rychlost $\boldsymbol{u}'$ směřovala kolmo ke směru pohybu lodi, musela by se velikost rychlosti lodě změnit na

$$v_1 = u_x = 1{,}826v = 36{,}5 \text{ km/h}.$$

2 body

2. Použijeme dvě inerciální vztažné soustavy podle obr. R2. První soustava Oxy bude spojena se zemí, druhá $O'x'y'$ se pohybuje rovnoměrně se středem válce. Počátky O, O' obou vztažných soustav volíme v bodě, kde se nachází nejnižší bod válce v okamžiku, kdy žába vyskočí. V tomto okamžiku, kdy $O \equiv O'$, položíme $t = t' = 0$. Vodorovná souřadnice žáby v okamžiku výskoku je tedy v obou vztažných soustavách stejná: $x_0 = x'_0$.

Pro okamžité rychlosti $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}'$ v obou vztažných soustavách platí $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{v}$. Předpokládejme, že žába vyskočí šikmo proti válci. Pak pro souřadnice počáteční rychlosti platí $u_{0x} = u'_{0x} - v,\ u_{0y} = u'_{0y}$.



Obr. R2

Ve vztažné soustavě $O'x'y'$ je trajektorií žáby parabola, jejíž vrchol je ve výšce $2R$ (obr. R3). V tomto bodě je $u'_x = u'_{0x},\ u'_y = 0$. Ze zákona zachování energie plyne

$$\frac{1}{2}mu_0'^2 = \frac{1}{2}mu_{0x}'^2 + \frac{1}{2}mu_{0y}'^2 = \frac{1}{2}mu_{0x}'^2 + mg \cdot 2R \quad \Rightarrow \quad u'_{0y} = 2\sqrt{gR}\,.$$

Velikost této složky počáteční rychlosti je vždy stejná. Vodorovná složka počáteční rychlosti bude nejmenší v případě, kdy se trajektorie žáby co nejvíce přiblíží povrchu válce. V takovém případě je poloměr křivosti ve vrcholu paraboly roven poloměru válce. Zakřivení paraboly způsobuje tíhová síla, která je v nejvyšším bodě silou dostředivou. V mezním případě platí

$$F_G = mg = \frac{mu_{0x}'^2}{R} \quad \Rightarrow |u'_{0x}| = \sqrt{gR}\,.$$

Ve vztažné soustavě spojené se zemí má počáteční rychlost žáby souřadnice

$$u_{0x} = |u'_{0x}| - v = \sqrt{gR} - v\,, \qquad u_{0y} = u'_{0y} = 2\sqrt{gR}\,.$$

Z toho dostaneme velikost počáteční rychlosti u_0 a elevační úhel α:

$$u_0 = \sqrt{u_{0x}^2 + u_{0y}^2} = \sqrt{4gR + (\sqrt{gR} - v)^2}\,, \qquad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{gR}}{\sqrt{gR} - v}.$$

5 bodů

Dobu výstupu t_v určíme z podmínky, že v nejvyšším bodě trajektorie je

$$u_y = u_{0y} - gt_\mathrm{v} = 0\,. \quad \text{Z toho} \quad t_\mathrm{v} = \frac{u_{0y}}{g} = 2\sqrt{\frac{R}{g}}\,.$$

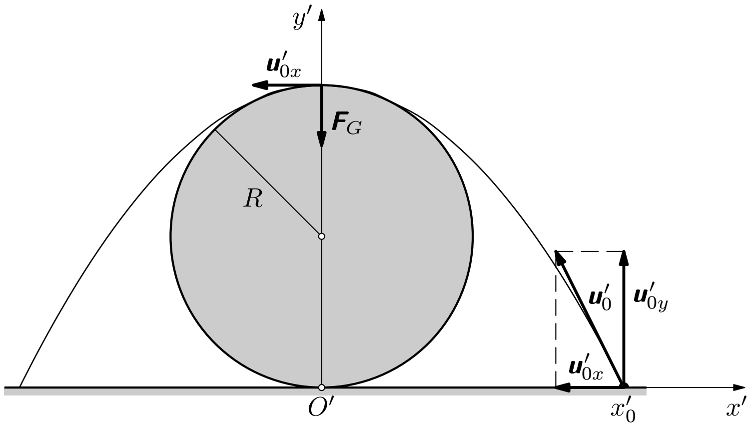
Vzdálenost žáby od bodu, kde se válec právě dotýká země v okamžiku výskoku, je

$$x_0 = x_0' = |u_{0x}'|t_\mathrm{v} = \sqrt{gR} \cdot 2\sqrt{\frac{R}{g}} = 2R\,.$$

2 body

Předcházející výpočty platí v případě, že $\sqrt{gR} > v$. Pokud platí $\sqrt{gR} \le v$, postačí, aby žába vyskočila kolmo vzhůru rychlostí o velikosti $u_0 = u_{0y} = 2\sqrt{gR}$ v okamžiku, kdy je nejnižší bod válce ve vzdálenosti $vt_\mathrm{v} = 2v\sqrt{\frac{R}{g}}$.

3 body



Obr. R3

3. Úlohu budeme řešit z hlediska pozorovatele sedícího v automobilu. Kamínek obíhá stálou rychlostí v po kružnici o poloměru r. Výsledná síla, která na něj působí, je tedy dostředivá síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{d}$ stálé velikosti

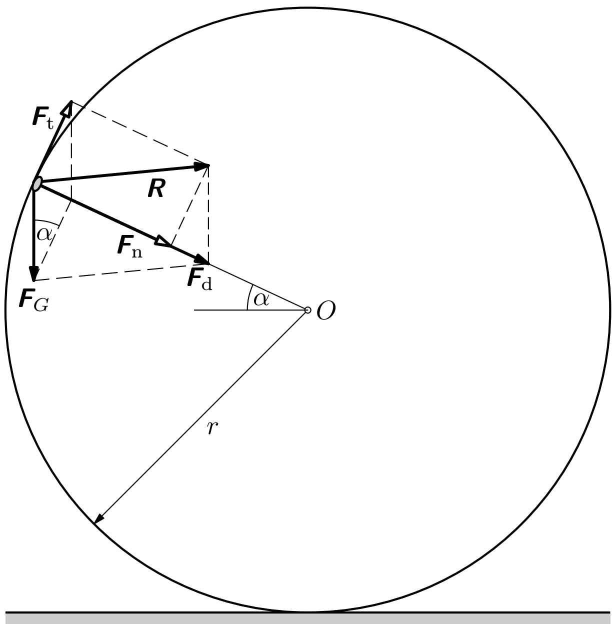
$$F_\mathrm{d} = \frac{mv^2}{r}\,,$$

která vzniká jako výslednice tíhové síly $\boldsymbol{F}_G$ a reakce pneumatiky $\boldsymbol{R}$ (obr. R4). Reakce pneumatiky má normálovou složku $\boldsymbol{F}_\mathrm{n}$ a tečnou složku $\boldsymbol{F}_\mathrm{t}$, která se uplatňuje jako smykové tření. Z obrázku odvodíme vztahy

$$F_\mathrm{n} = F_\mathrm{d} - F_G \sin\alpha\,, \qquad F_\mathrm{t} = F_G \cos\alpha\,,$$

kde α je odchylka průvodiče kamínku od vodorovné roviny. Snadno se přesvědčíme, že odvozené vztahy platí podél celé trajektorie.

2 body



Obr. R4

Má-li se kamínek během celého pohybu dotýkat bez klouzání určitého bodu pneumatiky, musí platit soustava nerovnic

$$F_\mathrm{n} = \frac{mv^2}{r} - mg\sin\alpha \geq 0\,, \tag{1}$$

$$F_{\mathrm{t}} = mg\cos\alpha \leq fF_{\mathrm{n}}\,. \tag{2}$$

3 body

Nerovnice (1) je splněna i v nejvyšším bodě trajektorie, kde $\sin\alpha = 1$, jestliže

$$\frac{mv^2}{r} \geq mg \qquad \Rightarrow \qquad v \geq \sqrt{rg}\,. \tag{3}$$

Úpravou nerovnice (2) dostaneme

$$mg\cos\alpha \leq f\left(\frac{mv^2}{r} - mg\sin\alpha\right) \qquad \Rightarrow \qquad v^2 \geq \frac{rg}{f}(\cos\alpha + f\sin\alpha)\,. \tag{4}$$

Nalezněme úhel α z intervalu $\langle -\pi/2, +\pi/2\rangle$, pro který výraz $\cos\alpha + f\sin\alpha$ dosahuje maximální hodnoty. Platí

$$\frac{\mathrm{d}(\cos\alpha + f\sin\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = -\sin\alpha + f\cos\alpha\,, \qquad \frac{\mathrm{d}^2(\cos\alpha + f\sin\alpha)}{\mathrm{d}\alpha^2} = -\cos\alpha - f\sin\alpha\,.$$

První derivace je nulová a extrém nastává pro $\operatorname{tg}\alpha = f$. Protože $f > 0$, je $\alpha \in (0, \pi/2)$. V tomto intervalu je druhá derivace záporná a v daném bodě tedy výraz dosahuje maxima.

2 body

Jestliže $\operatorname{tg}\alpha = f$, pak

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+f^2}}\,, \qquad \sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}\,.$$

Z nerovnice (4) pak plyne

$$v_{\min}^2 = \frac{rg}{f}\left(\frac{1}{\sqrt{1+f^2}} + \frac{f^2}{\sqrt{1+f^2}}\right) = \frac{rg}{f}\sqrt{1+f^2}\,,$$

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{rg}{f}\sqrt{1+f^2}}\,.$$

Tato hodnota splňuje i podmínku (3) odvozenou z nerovnice (1).

3 body

4. Počet atomů mědi, které se vyloučily na katodě, je

$$N = \frac{m}{M_\mathrm{m}} \cdot N_\mathrm{A} = \frac{8{,}54 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg}}{63{,}546 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot mol^{-1}}} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}} = 8{,}093 \cdot 10^{22}\,.$$

K vyloučení jednoho atomu mědi jsou zapotřebí 2 elektrony. Obvodem tedy za 24 hodin projde celkový náboj

$$Q = 2Ne = 2 \cdot 8{,}093 \cdot 10^{22} \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} = 25\,930\ \mathrm{C}\,.$$

Tomu odpovídá střední hodnota proudu

$$I_\mathrm{stř} = \frac{Q}{t} = \frac{25\,970\ \mathrm{C}}{86\,400\ \mathrm{s}} = 0{,}300\ \mathrm{A}\,.$$

Ke stejnému výsledku dojdeme rychleji užitím elektrochemického ekvivalentu mědi:

$$m = AQ = AI_\mathrm{stř}t\,,$$

$$I_\mathrm{stř} = \frac{m}{At} = \frac{8{,}54 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg}}{0{,}329 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{kg \cdot C^{-1}} \cdot 86\,400\ \mathrm{s}} = 0{,}300\ \mathrm{A}\,.$$

5 bodů

V elektrolytické vaně s měděnými elektrodami a roztokem $CuSO_4$ nedochází k polarizaci a pro okamžité hodnoty napětí a proudu platí Ohmův zákon ve tvaru $i = u/R$. Časový průběh proudu je znázorněn na obr. R5. Diodou prochází proud jen v jedné polovině periody, kdy je zapojena v propustném směru. V druhé polovině periody je proud nulový. Z definice střední hodnoty proudu plyne

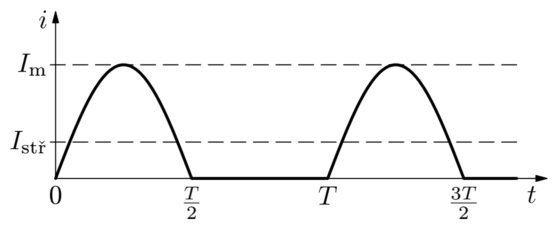
$$I_\mathrm{stř} = \frac{1}{T}\int_0^T i\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} I_\mathrm{m} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\,\mathrm{d}t\,.$$

Použijeme substituci $\frac{2\pi}{T}t = x, \quad \mathrm{d}t = \frac{T}{2\pi}\mathrm{d}x$ a dostaneme

$$I_\mathrm{stř} = \frac{1}{T} \cdot I_\mathrm{m} \cdot \frac{T}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = \frac{I_\mathrm{m}}{2\pi}\left[-\cos x\right]_0^{\pi} = \frac{I_\mathrm{m}}{2\pi} \cdot 2 = \frac{I_\mathrm{m}}{\pi}\,.$$

Z toho $I_\mathrm{m} = \pi \cdot I_\mathrm{stř} = \dfrac{\pi m}{At} = 0{,}943\ \mathrm{A}\,.$

5 bodů



Obr. R5

5. Protože odpor obvodu je velmi malý, trvá vybíjení kondenzátoru velmi krátkou dobu v porovnání s dobou kyvu smyčky. Během vybíjení prochází obvodem proud a na příčku v magnetickém poli působí síla, která smyčku uvede do pohybu. Jestliže za dobu Δt projde smyčkou náboj ΔQ, působí na příčku síla o velikosti

$$F = BIl = Bl\frac{\Delta Q}{\Delta t}\,. \tag{1}$$

Podle druhé impulsové věty platí

$$M = Fr = Blr\frac{\Delta Q}{\Delta t} = J\varepsilon = J\frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad\Rightarrow\quad \Delta\omega = \frac{Blr}{J}\Delta Q\,, \tag{2}$$

kde J je moment setrvačnosti smyčky vzhledem k ose O_1O_2 a $\Delta\omega$ je přírůstek její úhlové rychlosti. Průchodem celého náboje kondenzátoru $Q = CU$ získá smyčka úhlovou rychlost

$$\omega = \frac{BlrQ}{J} = \frac{BlrCU}{J}\,. \tag{3}$$

Pro vychýlení smyčky, které následuje, platí zákon zachování mechanické energie

$$\frac{1}{2}J\omega^2 = mgh = mgr_t(1-\cos\alpha)\,, \tag{4}$$

kde m je hmotnost smyčky, h je výška, do které při výkyvu vystoupí těžiště smyčky, a r_t je vzdálenost těžiště od osy O_1O_2. Dosazením z (3) do (4) dostaneme

$$\frac{1}{2}\,\frac{(BlrUC)^2}{J} = mgr_t(1-\cos\alpha) \quad\Rightarrow\quad B = \frac{\sqrt{2gmr_tJ(1-\cos\alpha)}}{lrUC}\,.$$

4 body

Za m, r_t a J dosadíme $m = \varrho S(2r+l)$, $\quad r_t = \dfrac{2\varrho Sr\frac{r}{2} + \varrho Slr}{\varrho S(2r+l)} = r\dfrac{r+l}{2r+l}$.

$$J = 2\varrho Sr\cdot\frac{r^2}{3} + \varrho Slr^2 = \varrho Sr^2\left(\frac{2}{3}r + l\right)$$

3 body

a po úpravě dostaneme

$$B = \frac{\varrho S}{lUC}\sqrt{2gr(r+l)\left(\frac{2}{3}r+l\right)(1-\cos\alpha)}\,.$$

Číselně vychází $B = 0{,}16$ T. **2 body**

Podle Flemingova pravidla levé ruky musí po sepnutí spínače procházet proud od bodu O_2 do bodu O_1. K bodu O_1 musí být před sepnutím spínače připojena záporně nabitá deska kondenzátoru a ke spínači kladně nabitá. **1 bod**

6. Odvození vztahu (1):

Pokud se kondenzátor během nárazu nabije jen na malé napětí $U \ll U_0$, je nabíjecí proud prakticky konstantní a platí $I \approx \frac{U_0}{R}$. Kondenzátor se nabije nábojem

$$Q = CU = It \approx \frac{U_0}{R} \cdot t. \qquad \text{Z toho} \qquad t \approx RC\frac{U}{U_0} = \tau\frac{U}{U_0}.$$

7. a) Při pohybu stálou rychlostí platí

$$mg\sin\alpha = Av_1^2 + F_0 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{mg\sin\alpha - F_0}{v_1^2} = 1{,}41\ \mathrm{N{\cdot}m^{-2}{\cdot}s^2} = 1{,}41\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-1}}.$$

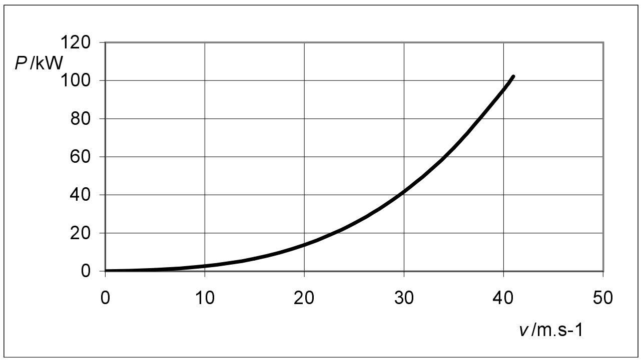
2 body

b) Výkon $P_1 = (Av_1^2 + F_0)v_1 = v_1 mg\sin\alpha \doteq 14\ \mathrm{kW}$.

2 body

c) Výkon motoru roste s třetí mocninou rychlosti: $P = (Av^2 + F_0)v$.
Z grafu a tabulky vyčteme, že motor dosáhne maximálního výkonu při rychlosti $40\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 144\ \mathrm{km/h}$.

v/m.s-1	0	5	10	15	20	25	30	35	40	41
P/kW	0	0,78	2,61	6,56	13,69	25,04	41,69	64,68	95,08	102,15



2 body

d) Pohyb po rovině se řídí pohybovou rovnicí

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -(Av^2 + F_0) \quad \Rightarrow \quad \frac{v\mathrm{d}v}{Av^2 + F_0} = -\frac{v\mathrm{d}t}{m} = -\frac{\mathrm{d}x}{m},$$

kterou zintegrujeme v mezích pro rychlost od v_1 do 0 a pro x v mezích od 0 do l_0:

$$\mathrm{d}(Av^2 + F_0) = 2Av\mathrm{d}v,$$

$$\frac{1}{2A}\int_{v_1}^{0} \frac{2Av\,\mathrm{d}v}{Av^2 + F_0} = -\frac{1}{m}\int_{0}^{l_0} \mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2A}\left[\ln(Av^2 + F_0)\right]_{v_1}^{0} = -\frac{l_0}{m}.$$

$$l_0 = \frac{m}{2A}\ln\left(\frac{Av_1^2}{F_0} + 1\right) \doteq 620\ \mathrm{m}.$$

4 body