Řešení úloh 1. kola 50. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie D*

Autoři úloh: J. Jírů (2, 3, 4, 5, 6), M. Jarešová, I. Volf (1), V. Vícha (7)

1. a) Dráha s_1, na které se cyklista rozjíždí, je dána vztahem

$$s_1 = \frac{1}{2} v_1 t_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{24}{3{,}6} \cdot 60 \text{ m} = 200 \text{ m}.$$

1 bod

b) Doba jízdy cyklisty rovnoměrným pohybem je $t_2 = \dfrac{s_2}{v_1} = \dfrac{1000}{\frac{24}{3{,}6}} \text{ s} = 150 \text{ s}.$

1 bod

c) Dráha cyklisty ve třetím úseku je $s_3 = 2\,700 \text{ m} - s_1 - s_2 = 1\,500 \text{ m}$. Pro tuto dráhu platí vztah $s_3 = \dfrac{1}{2}(v_1 + v_2)t_3$, z čehož

$$v_2 = \frac{2s_3}{t_3} - v_1 = \left(\frac{2 \cdot 1\,500}{270} - \frac{24}{3{,}6} \right) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 4{,}44 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 16 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

Jelikož $v_2 < v_1$, cyklista jel proti větru rovnoměrně zpomaleným pohybem.

2 body

d) V posledním úseku svého pohybu se cyklista pohyboval se zrychlením o velikosti

$$a_4 = \frac{v_2^2}{2s_4} = \frac{4{,}44^2}{2 \cdot 300} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 0{,}033 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Doba jízdy v tomto posledním úseku byla $t_4 = \dfrac{2s_4}{v_2} = \dfrac{2 \cdot 300}{4{,}44} \text{ s} = 135 \text{ s}.$

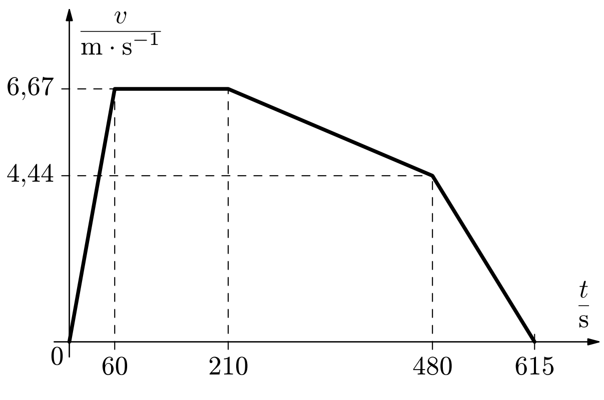
2 body

e) Průměrná rychlost cyklisty v_p je dána vztahem

$$v_\text{p} = \frac{s_1 + s_2 + s_3 + s_4}{t_1 + t_2 + t_3 + t_4} = \frac{3\,000}{615} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 4{,}88 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 17{,}6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

1 bod

f) Graf závislosti rychlosti na čase je znázorněn na obr. R1.



Obr. R1

3 body

2. a) Délka kruhového oblouku půlkružnice je $l = \pi r$. Z rovnice plyne pro poloměr oblouku 1. dráhy

$$r_1 = \frac{l}{\pi} = \frac{100}{\pi}\ \mathrm{m} = 31{,}83\ \mathrm{m}\,.$$

Poloměr oblouku 8. dráhy je

$$r_8 = r_1 + 7 \cdot 1{,}22\ \mathrm{m} = 40{,}37\ \mathrm{m}\,.$$

Délka 8. dráhy je

$$s_8 = 200\ \mathrm{m} + 2\pi r_8 = 453{,}66\ \mathrm{m}\,.$$

3 body

b) Rychlost běžce je $v = \dfrac{s}{t} = \dfrac{400}{46{,}5}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 8{,}60\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Úhlové rychlosti běžců jsou

$$\omega_1 = \frac{v}{r_1} = \frac{8{,}60}{31{,}83}\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}} = 0{,}270\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}\,,$$

$$\omega_8 = \frac{v}{r_8} = \frac{8{,}60}{40{,}37}\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}} = 0{,}213\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}\,.$$

3 body

c) Na běžce v jeho vztažné soustavě působí tíhová síla a setrvačná odstředivá síla. Vektorová přímka jejich výslednice protíná dráhu ve stopě běžce. Platí:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{F_\mathrm{s}}{F_G} = \frac{m r_1 \omega_1^2}{mg} = \frac{r_1\omega_1^2}{g} = \frac{31{,}83 \cdot 0{,}270^2}{9{,}81}\,, \quad \alpha_1 = 13{,}3^\circ\,,$$

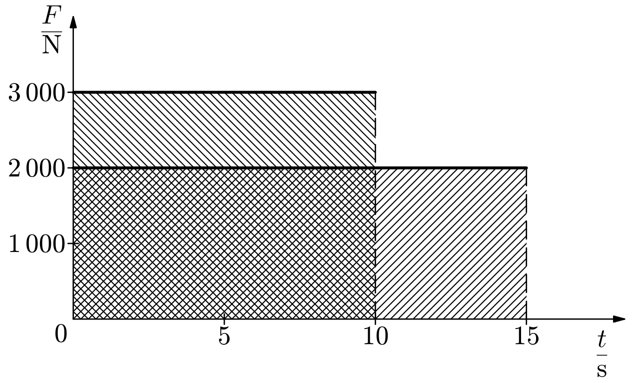
$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{r_8\omega_8^2}{g} = \frac{40{,}37 \cdot 0{,}213^2}{9{,}81}\,, \quad \alpha_8 = 10{,}6^\circ\,.$$

4 body

3. a) V prvním případě se štěrk sype po dobu $t_1 = l/v_1 = 10$ s. Síla první lokomotivy působící na vagon při konstantní rychlosti způsobuje urychlování štěrku ve vodorovném směru z nulové rychlosti na rychlost vagonu, její velikost je

$$F_1 = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta m \cdot v_1}{\Delta t} = 3\,000\ \mathrm{N}$$

a při průjezdu pod násypkou se nemění. Obdobně v druhém případě působí lokomotiva silou o velikosti 2 000 N po dobu 15 s.



Obr. R2

3 body

b) Obsah plochy pod grafem prvního pohybu je

$$3\,000\ \mathrm{N} \cdot 10\ \mathrm{s} = 30\,000\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1},$$

obsah plochy pod grafem druhého pohybu je

$$2\,000\ \mathrm{N} \cdot 15\ \mathrm{s} = 30\,000\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}.$$

Obsahy se tedy rovnají a udávají velikosti hybností štěrku získaných ve vodorovném směru.

2 body

c) Přírůstek kinetické energie první lokomotivy s vagonem je roven kinetické energii štěrku na korbě

$$\Delta E_{\mathrm{k}1} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta m}{\Delta t} t_1 \cdot v_1^2 = 18\ \mathrm{kJ}\,.$$

První lokomotiva vykonala práci $W_1 = F_1 l = 36$ kJ. Obdobně dostaneme pro druhou lokomotivu hodnoty $\Delta E_{\mathrm{k}2} = 12$ kJ, $W_2 = 24$ kJ.
Práce lokomotivy se spotřebovala na uvedení nákladu do pohybu vzhledem k zemi a na přírůstek vnitřní energie korby a štěrku, který vznikl, když třecí síla mezi štěrkem a vagonem způsobila uvedení štěrku do klidu vzhledem k vagonu.

3 body

Poznámka: Obecně lze dokázat, že z práce vykonané lokomotivou se právě polovina spotřebuje na kinetickou energii štěrku a zbývající polovina se přemění na nemechanickou formu energie – na vnitřní energii, která se projeví zahřátím třecích ploch:

$$W = Fl = \frac{\Delta m \cdot v}{\Delta t} \cdot v \Delta t = \Delta m \cdot v^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \Delta m \cdot v^2 = 2 \Delta E_{\mathrm{k}}\,.$$

d) Výkon první lokomotivy je $P_1 = F_1 v_1 = \dfrac{W_1}{t_1} = 3{,}6\ \mathrm{kW}$,
obdobně výkon druhé lokomotivy je $P_2 = 1{,}6\ \mathrm{kW}$.

2 body

4. a) Označme m hmotnost každého z vagonů. Složka tíhové síly každého vagonu ve směru nakloněné roviny má velikost

$$F_1 = mg\sin\alpha\,,$$

složka tíhové síly každého vagonu působící kolmo na nakloněnou rovinu má velikost

$$F_2 = mg\cos\alpha\,.$$

Velikost zrychlení nezabrzděné soupravy je

$$a = \frac{NF_1}{Nm} = \frac{mg\sin\alpha}{m} = g\sin\alpha = 0{,}34\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}\,.$$

2 body

b) Velikost třecí síly působící na každý vagon je

$$F_\mathrm{t} = fF_2 = fmg\cos\alpha\,.$$

Velikost zrychlení soupravy je

$$a_1 = \frac{NF_1 - F_\mathrm{t}}{Nm} = \frac{Nmg\sin\alpha - fmg\cos\alpha}{Nm} = \frac{N\sin\alpha - f\cos\alpha}{N}g = 0{,}23\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}\,.$$

2 body

c) Z podmínky $Nmg\sin\alpha \leq Kfmg\cos\alpha$ plyne $K \geq \dfrac{N\sin\alpha}{f\cos\alpha} = 3{,}03$, tedy minimálně 4 vagony musí být zabrzděné.

3 body

d) Z podmínky $(L+1)mg\sin\alpha \leq fmg\cos\alpha$ plyne $L \leq \dfrac{f\cos\alpha}{\sin\alpha} - 1 = 3{,}30$, tedy k jednomu zabrzděnému vagonu můžeme připojit maximálně 3 vagony.

3 body

5. a) Maximální výška prvního vrhu je

$$h_1 = \frac{1}{2} g \left(\frac{t_1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8} g t_1^2 = 2{,}8 \text{ m},$$

maximální výška druhého vrhu je

$$h_2 = \frac{1}{2} g \left(\frac{2t_1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} g t_1^2 = 4h_1 = 11{,}0 \text{ m}.$$

2 body

b) Rychlost míče rozložíme na vodorovnou složku $\boldsymbol{v}_x$ a svislou složku $\boldsymbol{v}_y$. Minimální velikosti rychlosti dosáhne míč v maximální výšce, kde $v_y = 0$:

$$v_{\min 1} = v_{x1} = \frac{d}{t_1} = 12{,}0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Obdobně pro druhý vrh $v_{\min 2} = v_{x2} = \dfrac{d}{2t_1} = \dfrac{1}{2} v_{\min 1} = 6{,}0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Maximální velikost má rychlost míče v okamžiku vrhu:

$$v_{\max 1} = \sqrt{v_{x1}^2 + v_{y1}^2} = \sqrt{\left(\frac{d}{t_1}\right)^2 + \left(g\frac{t_1}{2}\right)^2} = 14{,}1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

$$v_{\max 2} = \sqrt{v_{x2}^2 + v_{y2}^2} = \sqrt{\left(\frac{d}{2t_1}\right)^2 + \left(g\frac{2t_1}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{d}{2t_1}\right)^2 + (g t_1)^2} = 15{,}9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

4 body

c) V okamžiku vrhu platí: $\operatorname{tg} \alpha_1 = \dfrac{v_{y1}}{v_{x1}} = \dfrac{g\dfrac{t_1}{2}}{\dfrac{d}{t_1}} = \dfrac{g t_1^2}{2d}$, $\quad \alpha_1 = 32°$,

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{v_{y2}}{v_{x2}} = \frac{g\dfrac{2t_1}{2}}{\dfrac{d}{2t_1}} = \frac{2 g t_1^2}{d}, \quad \alpha_2 = 68°.$$

2 body

d) Práce je rovna kinetické energii míče v okamžiku vrhu:

$$W_1 = \frac{1}{2} m v_{\max 1}^2 = \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{d}{t_1}\right)^2 + \left(g\frac{t_1}{2}\right)^2\right] = 30 \text{ J},$$

$$W_2 = \frac{1}{2} m v_{\max 2}^2 = \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{d}{2t_1}\right)^2 + (g t_1)^2\right] = 38 \text{ J}.$$

2 body

6. a)

$$\varrho = \frac{m}{m - \varrho_v(V_0 - V_1)}\varrho_v\,.$$

1 bod

b) Pro vodu o pokojové teplotě v rozmezí 19 °C až 23 °C lze použít podle tabulek s přesností na 3 platné číslice hodnotu $\varrho_v = 0{,}998\ \mathrm{g\cdot cm^{-3}}$.

1 bod

c) Ukázka výsledků pro pivní lahve dvou typů:

Láhev	$\frac{m}{\mathrm{g}}$	$\frac{V_0}{\mathrm{cm^3}}$	$\frac{V_1}{\mathrm{cm^3}}$	$\frac{\varrho}{\mathrm{g\cdot cm^{-3}}}$
typ I, č. 1	374,6	522	295	2,53
typ I, č. 2	380,5	522	290	2,55
typ I, č. 3	377,0	523	295	2,52
typ II, č. 1	322,1	523	325	2,58
typ II, č. 2	323,0	522	325	2,55
typ II, č. 3	327,2	524	325	2,54

Z provedených 6 měření jsme určili střední hustotu $\varrho = 2{,}55\ \mathrm{g\cdot cm^{-3}}$.

5 bodů

d) K měření objemů V_0 a V_1 byly použity dva odměrné válce s objemy 500 ml a 100 ml s odpovídajícím nejmenším dílkem stupnice 5 ml a 1 ml. Ke zjištění objemů V_0 a V_1 bylo nutné použít dvakrát větší válec a jednou menší válec. Považujeme-li za maximální přípustnou odchylku měření hodnotu nejmenšího dílku stupnice, dopustili jsme maximální odchylky $(5+5+1)$ ml = 11 ml. Hodnota rozdílu objemů $V_0 - V_1$, která vystupuje ve vzorci, se pohybuje v rozmezí 197 až 232 ml, tedy horní hranicí relativní odchylky měření je hodnota

$$\frac{11}{197}\cdot 100\ \% = 6\ \%$$

Hmotnost byla určena technickými vahami s průměrnou odchylkou 0,1 g, což při navážených hmotnostech odpovídá relativní odchylce kolem 0,03 %. Vzhledem k relativní odchylce při měření objemu je tato odchylka zanedbatelná.

S přesností měření též souvisí nutnost důkladného přelévání kapaliny z láhve a přesnost při stanovení polohy plovoucí či vznášející se láhve.

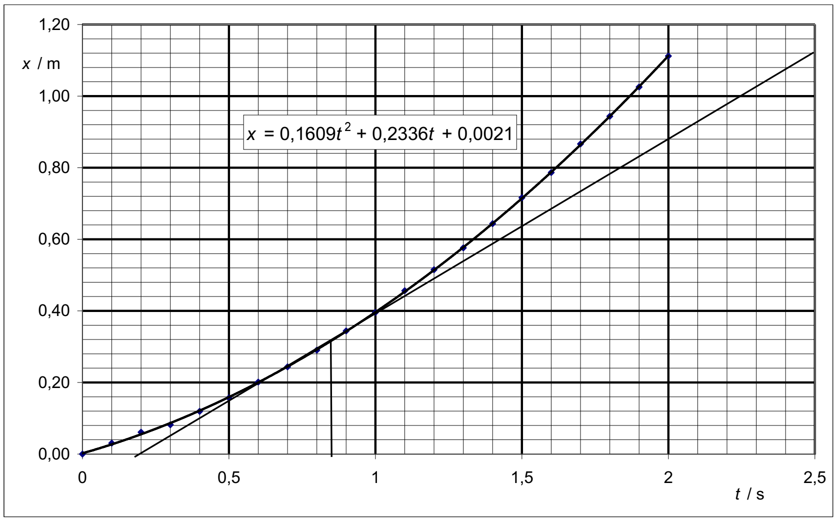
Vezmeme-li chyby při měření objemu jako rozhodující, dostáváme konečný výsledek určení hustoty skla pivních lahví

$$\delta\varrho = 0{,}06\,, \quad \varrho = 2{,}55(1 \pm 0{,}06)\ g\cdot \mathrm{cm^{-3}} = (2{,}55 \pm 0{,}15)\ g\cdot \mathrm{cm^{-3}}\,.$$

Vyloučíme-li možnost systematické chyby měření (např. tím, že láhev při plování nepatrně vyčnívala nad hladinu), dostáváme při statistickém zpracování získaných výsledků hustotu skla $\varrho = (2{,}55 \pm 0{,}02)\ \mathrm{g\cdot cm^{-3}}$ s relativní odchylkou 0,8 %. Tato střední odchylka je podstatně menší než výše posouzená odchylka maximální.

3 body

7. Ukázka zpracování videozáznamu je v následujícím grafu:



Bodové hodnocení:

a) Sestrojení grafu a nalezení regresní funkce jako polynomu druhého stupně

4 body

b) Protože grafem závislosti souřadnice na čase je parabola, jedná se o rovnoměrně zrychlený pohyb, pro jehož dráhu obecně platí $s = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$.

1 bod

V porovnáním s nalezenou regresní funkcí je vidět, že počáteční rychlost $v_0 = 0{,}23\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Pro zrychlení platí $\frac{1}{2}\{a\} = 0{,}16$, $a = 0{,}32\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

2 body

c) Velikost rychlosti v čase 0,85 s vypočítáme podle vzorce dosazením hodnot počáteční rychlosti a zrychlení z úlohy b). Vyjde

$$v_1 = (0{,}234 + 0{,}324 \cdot 0{,}85)\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 0{,}51\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}\,.$$

1 bod

d) Sestrojená tečna dává poměr $v_1 = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1{,}12 - 0}{2{,}5 - 0{,}22}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 0{,}49\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, což odpovídá výsledku c). Mírně odlišný výsledek je způsoben subjektivní volbou sklonu tečny ke křivce.

2 body