Řešení úloh 1. kola 49. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie C*

Autoři úloh: J. Jírů (1), P. Šedivý (2, 3, 4, 5, 6), I. Volf a M. Jarešová (7).

1. Označme v_0 souřadnici rychlosti kuličky o hmotnosti $3m$ bezprostředně před rázem a v_1 bezprostředně po rázu, dále v_2 souřadnici rychlosti kuličky o hmotnosti m bezprostředně po rázu. Souřadnice rychlosti kuličky o hmotnosti m před rázem je $-v_0$. Během rázu jsou splněny ZZH a ZZME:

$$3mv_0 - mv_0 = 3mv_1 + mv_2\,, \qquad \frac{1}{2}\cdot 3mv_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}\cdot 3mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2\,.$$

Po úpravě rovnic dostaneme

$$2v_0 = 3v_1 + v_2\,, \qquad 4v_0^2 = 3v_1^2 + v_2^2\,.$$

Vyloučením neznámé v_2 dostaneme kvadratickou rovnici s neznámou v_1:

$$v_1(v_1 - v_0) = 0\,.$$

Rovnice má kořeny $v_1 = 0$, $v_1' = v_0$, jimž odpovídají kořeny $v_2 = 2v_0$, $v_2' = -v_0$. Čárkovanou dvojici kořenů vyloučíme, neboť udávají souřadnice rychlostí před srážkou. Skutečnou situaci po srážce udává nečárkovaná dvojice $v_1 = 0$, $v_2 = 2v_0$. Výsledek znamená, že hmotnější kulička se při srážce zastaví a méně hmotná kulička se uvede do pohybu v původním směru pohybu hmotnější kuličky dvojnásobně velikou rychlostí.

5 bodů

Označme l délku vlákna. Kulička s dvojnásobnou rychlostí po rázu má čtyřnásobnou kinetickou energii, než byla její kinetická energie bezprostředně před rázem, tudíž její energie je dostatečná k tomu, aby vystoupala do výšky $2l$. Ze ZZME určíme velikost w_2 v nejvyšším bodě:

$$\frac{1}{2}m(2v_0)^2 = mg\cdot 2l + \frac{1}{2}mw_2^2\,.$$

Uvážením $v_0 = \sqrt{2gl}$ dostaneme $w_2 = 2\sqrt{gl}\,.$

Aby vlákno zůstalo napnuté po celé kružnici, musí mít kulička v nejvyšším bodě trajektorie minimální rychlost $w_{\min}$ splňující podmínku

$$\frac{mw_{\min}^2}{l} = mg \qquad \Rightarrow \qquad w_{\min} = \sqrt{gl}\,.$$

Protože $w_2 > w_{\min}$, projde kulička nejvyšším bodem a tím i celou trajektorií při napnutém vlákně. Po jedné otočce narazí v nejnižší poloze na hmotnější kuličku, která je v klidu, stejnou rychlostí, jakou měla bezprostředně po prvním rázu, tedy rychlostí $2v_0$. Tento druhý ráz probíhá opačně vzhledem k prvnímu, obě kuličky se proto vychýlí v navzájem opačných směrech o $90°$. Tím nastává stav jako na začátku a celý popsaný cyklus se začíná opakovat.

5 bodů

2. a) Při pohybu špalíku mají dynamický účinek dvě síly: pohybová složka tíhové síly o velikosti $mg\sin\alpha$ a třecí síla o velikosti $fmg\cos\alpha$. Pohyb nahoru je rovnoměrně zpomalený se zrychlením o velikosti

$$a_1 = g\sin\alpha + fg\cos\alpha\,.$$

Pro velikost rychlosti špalíku a vzdálenost od dolního konce nakloněné roviny v časovém intervalu $(0, t_1)$ platí

$$v = v_0 - a_1 t\,, \qquad d = v_0 t - \frac{1}{2}a_1 t^2\,.$$

V čase $t = t_1$ je $v = 0$, $d = d_\mathrm{m}$.

Z toho plyne $v_0 = a_1 t_1$, $d = d_\mathrm{m} = \dfrac{v_0 t_1}{2} = \dfrac{1}{2}a_1 t_1^2$.

Pohyb dolů je rovnoměrně zrychlený se zrychlením o velikosti

$$a_2 = g\sin\alpha - fg\cos\alpha.$$

Pro velikost rychlosti špalíku a vzdálenost od dolního konce nakloněné roviny v časovém intervalu $(t_1, t_1 + t_2)$ platí

$$v = a_2(t - t_1)\,, \qquad d = d_\mathrm{m} - \frac{1}{2}a_2(t - t_1)^2\,.$$

V čase $t = t_1 + t_2$ je $v = v_1 = a_2 t_2$, $d = 0$.

Z toho $d_\mathrm{m} = \dfrac{1}{2}a_2 t_2^2 = \dfrac{v_1 t_2}{2}$. **3 body**

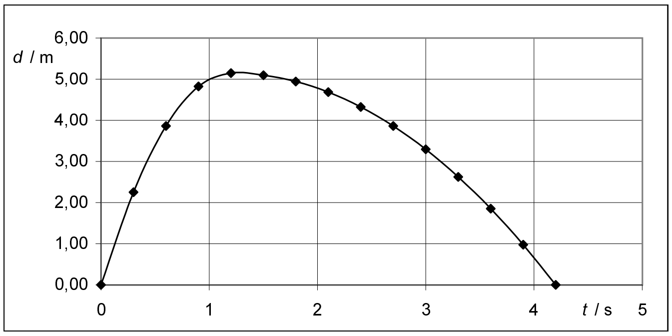
Porovnáním vztahů dostaneme $\dfrac{1}{2}a_1 t_1^2 = \dfrac{1}{2}a_2 t_2^2$,

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{g\sin\alpha + fg\cos\alpha}{g\sin\alpha - fg\cos\alpha} = \frac{t_2^2}{t_1^2} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{t_2^2 - t_1^2}{t_2^2 + t_1^2}\,\mathrm{tg}\,\alpha\,.$$

Po dosazení číselných hodnot vychází:
$f = 0{,}338$, $a_1 = 7{,}15\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $a_2 = 1{,}14\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $v_0 = 8{,}58\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $v_1 = 3{,}42\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $d_\mathrm{m} = 5{,}13$ m. **3 body**

b) Závislost vzdálenosti špalíku od dolního konce nakloněné roviny na čase je zachycena v tabulce a grafu:

t / s	0	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1	2,4	2,7	3	3,3	3,6	3,9	4,2
d / m	0,00	2,25	3,86	4,82	5,15	5,10	4,94	4,68	4,32	3,86	3,29	2,62	1,85	0,98	0,00



4 body

3. a) Při ustálené hladině je velikost výtokové rychlosti

$$v_0 = \sqrt{2g(H-h)} = \frac{4Q_V}{\pi d^2}\,,$$

z toho $\quad H - h = \dfrac{8Q_V^2}{g\pi^2 d^4}\,, \qquad H = h + \dfrac{8Q_V^2}{g\pi^2 d^4}\,.$

Číselně vychází $v_0 = 1{,}59\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $H - h = 0{,}129\ \mathrm{m}$, $H = 0{,}229\ \mathrm{m}$. **3 body**

b) Pohyb částice vody, která opustila otvor v nádobě, probíhá jako vodorovný vrh. Částice dopadne za dobu

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

ve vzdálenosti

$$L = v_0 t = \sqrt{2g(H-h)}\cdot\sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\sqrt{(H-h)h} = \frac{4Q_V}{\pi d^2}\sqrt{\frac{2h}{g}}\,.$$

Číselně vychází $L = 0{,}227\ \mathrm{m}$. **3 body**

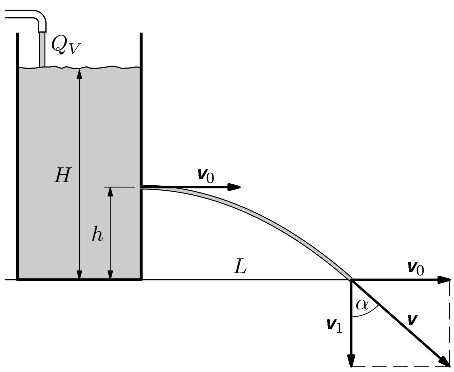
c) Při dopadu částice na vodorovnou rovinu má vodorovná složka její rychlosti velikost v_0 a svislá složka velikost $v_1 = gt = \sqrt{2gh}$. Výsledný vektor rychlosti dopadu má velikost

$$v = \sqrt{v_0^2 + v_1^2} = \sqrt{2g(H-h) + 2gh} = \sqrt{2gH} = \sqrt{\frac{16Q_V^2}{\pi^2 d^4} + 2gh}$$

a pro úhel dopadu platí podle obr. R1

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_0}{v_1} = \frac{\sqrt{2g(H-h)}}{\sqrt{2gh}} = \sqrt{\frac{H-h}{h}} = \frac{4Q_V}{\pi d^2\sqrt{2gh}}\,.$$

Číselně vychází $v = 2{,}12\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}136$, $\alpha = 48{,}6^\circ$. **4 body**



Obr. R1

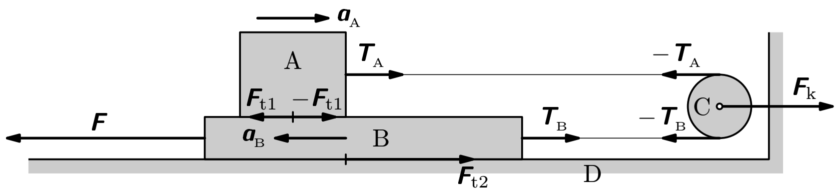
4. a) Síly vodorovného směru, které působí na jednotlivá tělesa soustavy, jsou vyznačeny na obr. R2.

- Na kvádr A působí ve svislém směru tíhová síla o velikosti $m_A g$ a proti ní stejně velká normálová síla od kvádru B. Ve vodorovném směru působí na kvádr A síla vlákna $\boldsymbol{T}_A$ a proti ní třecí síla $\boldsymbol{F}_{t1}$ o velikosti $f m_A g$.
- Výslednice těchto sil uděluje kvádru A zrychlení $\boldsymbol{a}_A$, které je stejně velké jako zrychlení $\boldsymbol{a}_B$ kvádru B, ale opačného směru. Můžeme tedy položit

$$a_A = a_B = a\,.$$

- Na kvádr B působí směrem dolů vlastní tíhová síla velikosti $m_B g$ a tíha kvádru A velikosti $m_A g$. Normálová složka reakce podložky D má tedy velikost $(m_A + m_B)g$. Ve vodorovném směru působí na kvádr B síla $\boldsymbol{F}$ a proti ní síla vlákna $\boldsymbol{T}_B$ a třecí síly $-\boldsymbol{F}_{t1}$ o velikosti $f m_A g$ a $\boldsymbol{F}_{t2}$ o velikosti $f(m_A + m_B)g$. Výslednice těchto sil uděluje kvádru B zrychlení $\boldsymbol{a}_B$.
- Na kladku C působí ve vodorovném směru síly vláken $-\boldsymbol{T}_A$, $-\boldsymbol{T}_B$ a proti nim síla stěny $\boldsymbol{F}_k$. Protože moment setrvačnosti kladky je nulový, mají obě síly vlákna stejnou velikost. Můžeme tedy položit

$$T_A = T_B = T\,.$$



Obr. R2

3 body

b) Pohyb soustavy popisují pohybové rovnice

$$m_A a = T - f m_A g\,, \qquad m_B a = F - T - f m_A g - f(m_A + m_B)g\,.$$

Jejich řešením dostaneme

$$T = m_A(a + fg)\,, \qquad F = (m_A + m_B)a + f(3m_A + m_B)g\,.$$

Číselně vychází $F = 20{,}9$ N. **4 body**

c) Třmen působí na osu kladky silou o velikosti

$$F_k = 2T = 2m_A(a + fg) = 9{,}4\ \mathrm{N}\,.$$ **1 bod**

d) Kvádry se budou pohybovat rovnoměrně ($a = 0$), jestliže se velikost síly $\boldsymbol{F}$ zmenší na

$$F_r = f(3m_A + m_B)g = 17{,}2\ \mathrm{N}\,.$$ **2 body**

5. a) Jedná se o izotermický děj. Podle Boylova-Mariottova zákona platí

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 = p_0 V_0 ,$$

kde $V_1 = Sl_1$, $V_2 = Sl_2$ jsou objemy vzduchových sloupců ve svislé poloze trubice, p_1, p_2 příslušné tlaky vzduchu ve sloupcích, $V_0 = Sl_0$ je objem vzduchových sloupců ve vodorovné poloze, $p_0 = h_0 \varrho g$ je atmosférický tlak a ϱ je hustota rtuti. Z toho

$$p_1 l_1 = p_2 l_2 = p_0 l_0 .$$

Dále platí

$$l_1 + l_2 = 2l_0, \quad p_1 - p_2 = \varrho h g .$$

3 body

Postupnými úpravami:

$$p_1 - p_2 = \frac{p_0 l_0}{l_1} - \frac{p_0 l_0}{l_2} = \varrho g h_0 l_0 \left(\frac{1}{l_1} - \frac{1}{2l_0 - l_1} \right) = \varrho g h ,$$

$$\frac{h_0 l_0}{h} \left(\frac{1}{l_1} - \frac{1}{2l_0 - l_1} \right) = 1 , \qquad \frac{h_0 l_0}{h} (2l_0 - 2l_1) = 2l_0 l_1 - l_1^2$$

dojdeme ke kvadratické rovnici

$$\frac{l_1^2}{2} - l_0 \left(\frac{h_0}{h} + 1 \right) l_1 + \frac{h_0 l_0^2}{h} = 0 .$$

Protože $l_1 < l_0$, vyhovuje úloze kořen $l_1 = l_0 \left(\frac{h_0}{h} + 1 - \sqrt{\frac{h_0^2}{h^2} + 1} \right)$.

Pro dané hodnoty vychází $l_1 = 0{,}753 l_0 = 22{,}6$ cm, $l_2 = 37{,}4$ cm.

4 body

b) Úpravou rovnice $\frac{l_0}{2} = l_0 \left(\frac{h_0}{h} + 1 - \sqrt{\frac{h_0^2}{h^2} + 1} \right)$ dostaneme

$$\sqrt{\frac{h_0^2}{h^2} + 1} = \frac{h_0}{h} + \frac{1}{2} , \qquad \frac{h_0^2}{h^2} + 1 = \frac{h_0^2}{h^2} + \frac{h_0}{h} + \frac{1}{4} ,$$

$$\frac{h_0}{h} = \frac{3}{4} , \qquad h = \frac{4}{3} h_0 .$$

Ke stejnému výsledku můžeme dospět také přímo z Boylova-Mariottova zákona. Platí

$$l_1 = \frac{l_0}{2} , \quad l_2 = \frac{3}{2} l_0 \quad \Rightarrow \quad p_1 = 2p_0 , \quad p_2 = \frac{2}{3} p_0 ,$$

$$\varrho g h = p_1 - p_2 = \frac{4}{3} p_0 = \frac{4}{3} \varrho h_0 g \quad \Rightarrow \quad h = \frac{4}{3} h_0 .$$

Pro dané hodnoty vychází $h = 101$ cm $> L$. Úloha b) tedy pro dané hodnoty nemá řešení.

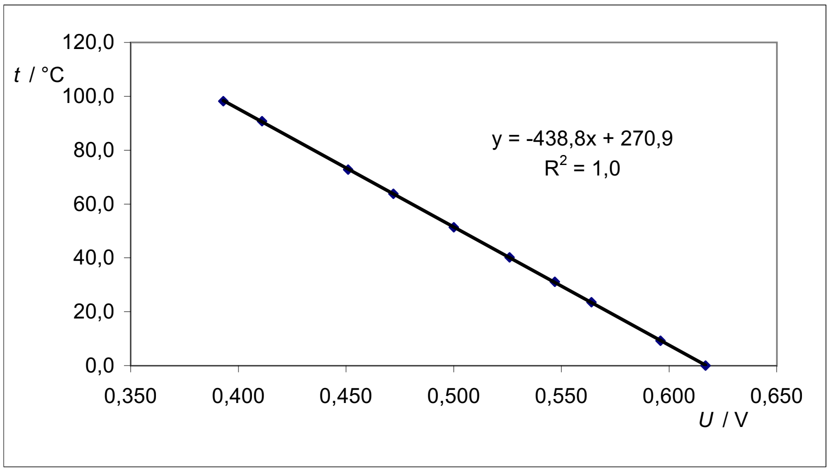
3 body

6. Ukázka naměřených hodnot a jejich zpracování je v následující tabulce a grafu. Vztah mezi teplotou čidla a napětím voltmetru je mezích přesnosti měření dokonale lineární a můžeme ho zapsat ve tvaru

$$t = (-438{,}8\{U\} + 270{,}9)\ °\mathrm{C}\,.$$

Napětí odečítáme na milivoltmetru s přesností ±1 mV. Tomu odpovídá chyba při určení teploty ±0,5 V.

t / °C	0,0	9,2	23,5	31,1	40,2	51,4	63,8	72,8	90,8	98,2
U / V	0,617	0,596	0,564	0,547	0,526	0,500	0,472	0,451	0,411	0,393



7. a) V tomto případě se jedná o tepelnou výměnu prouděním a platí vztah

$$Q_1 = \alpha \cdot \mathrm{S} \cdot \Delta t \cdot \tau_1 = 20 \cdot (6{,}2 \cdot 15{,}8) \cdot 10 \cdot 3600\ \mathrm{J} = 70{,}5\ \mathrm{MJ}.$$

1 bod

b) Množství tepla přijatého vodou je dáno vztahem

$$Q_2 = cm\Delta t = 4180 \cdot 1000 \cdot 6{,}2 \cdot 15{,}8 \cdot 1{,}8 \cdot (25 - 15)\ \mathrm{J} = 7{,}37\ \mathrm{GJ}.$$

Výkon P je dán vztahem

$$P = \frac{Q_2}{\tau_2} = \frac{cm\Delta t}{\tau_2} = \frac{4180 \cdot 1000 \cdot 6{,}2 \cdot 15{,}8 \cdot 1{,}8 \cdot (25 - 15)}{18 \cdot 3600}\ \mathrm{W} = 113{,}7\ \mathrm{kW}.$$

2 body

c) Hmotnost uhlí určíme ze vztahu

$$m = \frac{Q_2}{H \cdot \eta_1 \cdot \eta_2} = \frac{7{,}37 \cdot 10^9}{12{,}5 \cdot 10^6 \cdot 0{,}36 \cdot 0{,}85}\ \mathrm{kg} = 1927\ \mathrm{kg} \doteq 2\ \text{tuny}.$$

2 body

d) Plocha stěn a dna, jimiž uniká teplo do okolní půdy, má velikost

$$S = (6{,}2 \cdot 15{,}8 + 2 \cdot (1{,}8 \cdot 6{,}2 + 1{,}8 \cdot 15{,}8))\ \mathrm{m}^2 = 177{,}16\ \mathrm{m}^2.$$

Za dobu τ unikne touto plochou teplo $Q_3 = \dfrac{\lambda_1 S \tau \Delta t}{d}$. Za jednu hodinu je

$$Q_3 = \frac{0{,}82 \cdot 177{,}16 \cdot 3600 \cdot (25 - 5)}{0{,}12}\ \mathrm{J} = 87{,}2\ \mathrm{MJ}.$$

Za 1 den je $Q_4 = 24 Q_3 = 2\,092\ \mathrm{MJ}$.

2 body

e) Po obklopení betonového korpusu vodovzdornou izolací unikne za dobu τ do okolní půdy teplo

$$Q_3' = \frac{S \tau \Delta t}{\dfrac{d_1}{\lambda_1} + \dfrac{d_2}{\lambda_2}}.$$

Za 1 hodinu je $Q_3' = \dfrac{177{,}16 \cdot 3600 \cdot (25 - 5)}{\dfrac{0{,}12}{0{,}82} + \dfrac{0{,}05}{0{,}11}}\ \mathrm{J} = 21{,}2\ \mathrm{MJ}$,
za 1 den je $Q_4' = 24 Q_3' = 509{,}5\ \mathrm{MJ}$.

2 body

f) Litina má velké λ – teplo litinou se dobře odvádí (podstatně lépe než betonem), vana je obklopená vzduchem (zatímco beton zeminou) – dochází k odvádění tepla prouděním. Ve vaně je malé množství vody – „velká“ vodní hladina – opět se odvádí teplo prouděním – tentokrát také přímo z vodní hladiny.

1 bod