Řešení úloh celostátního kola 50. ročníku fyzikální olympiády.

Autoři úloh: I. Volf (1), M. Jarešová (2),
3. a 4. úloha jsou převzaty z časopisu Kvant.
Konečná úprava P. Šedivý

1. a) Vyjdeme z 3. Keplerova zákona $\frac{r_Z^3}{a^3} = \frac{T_Z^2}{T_M^2}$, z čehož

$$a = \sqrt[3]{\left(\frac{T_M}{T_Z}\right)^2} r_Z = 1{,}524 \text{ AU} = 2{,}280 \cdot 10^{11} \text{ m}.$$

Dále platí

$$b = \sqrt{a^2 - e^2} = a\sqrt{1 - \varepsilon^2} = 0{,}9956a = 1{,}517 \text{ AU} = 2{,}270 \cdot 10^{11} \text{ m},$$

$$r_p = a(1 - \varepsilon) = 0{,}9066a = 1{,}381 \text{ AU} = 2{,}067 \cdot 10^{11} \text{ m},$$

$$r_a = a(1 + \varepsilon) = 1{,}0934a = 1{,}666 \text{ AU} = 2{,}493 \cdot 10^{11} \text{ m}.$$

3 body

b) Za dobu T_M opíše průvodič Marsu plochu $S = \pi ab = 1{,}625 \cdot 10^{23}$ m^2. Plošná rychlost Marsu je tedy

$$w = \frac{S}{T_M} = \frac{\pi ab}{T_M} = 2{,}738 \cdot 10^{15} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}.$$

Platí $w = \frac{v_p r_p}{2} = \frac{v_a r_a}{2}$. Z toho

$$v_p = \frac{2w}{r_p} = 26{,}5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}, \qquad v_a = \frac{2w}{r_a} = 22{,}0 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

$$\frac{v_p}{v_a} = \frac{r_a}{r_p} = \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} = 1{,}21.$$

2 body

c) Pro zářivý tok $\varPhi_e$, dopadající ze Slunce o zářivém výkonu L kolmo na plochu o obsahu S ve vzdálenosti r od Slunce, platí $\varPhi_e = \frac{L}{4\pi r^2} S$.

Pro Zemi platí $k_{sZ} = \frac{\varPhi_e}{S} = \frac{L}{4\pi r_Z^2}$, analogicky pro Mars v aféliu můžeme psát $k_{sa} = \frac{L}{4\pi r_a^2}$, a v periheliu $k_{sp} = \frac{L}{4\pi r_p^2}$. Z toho

$$\frac{k_{sa}}{k_{sZ}} = \left(\frac{r_Z}{r_a}\right)^2, \qquad k_{sa} = \left(\frac{r_Z}{r_a}\right)^2 k_{sZ} = 490 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2},$$

$$\frac{k_{sp}}{k_{sZ}} = \left(\frac{r_Z}{r_p}\right)^2, \qquad k_{sp} = \left(\frac{r_Z}{r_p}\right)^2 k_{sZ} = 713 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}.$$

$$\frac{k_{\mathrm{sp}}}{k_{\mathrm{sa}}} = \left(\frac{r_{\mathrm{a}}}{r_{\mathrm{p}}}\right)^2 = \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^2 = 1{,}45.$$

2 body

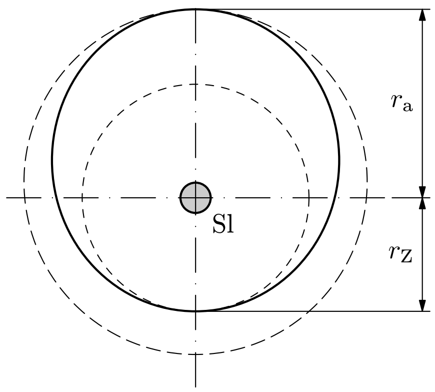
d) Situace v případě, že k přiblížení stanice k Marsu dojde, když je Mars v aféliu, je zobrazena na obr. R1. Hlavní poloosa trajektorie kosmické stanice má délku $a_1 = (r_{\mathrm{Z}} + r_{\mathrm{a}})/2$. Podle 3. Keplerova zákona je doba oběhu stanice na této trajektorii

$$T_1 = \sqrt{\left(\frac{a_1}{r_{\mathrm{Z}}}\right)^3} T_{\mathrm{Z}} = 1{,}54 \text{ roku} = 562 \text{ dní}.$$

Jestliže k přiblížení stanice k Marsu dojde, když je v periheliu, má hlavní poloosa trajektorie kosmické stanice délku $a_2 = (r_{\mathrm{Z}} + r_{\mathrm{p}})/2$ a doba oběhu stanice na této trajektorii je

$$T_2 = \sqrt{\left(\frac{a_2}{r_{\mathrm{Z}}}\right)^3} T_{\mathrm{Z}} = 1{,}30 \text{ roku} = 475 \text{ dní}.$$

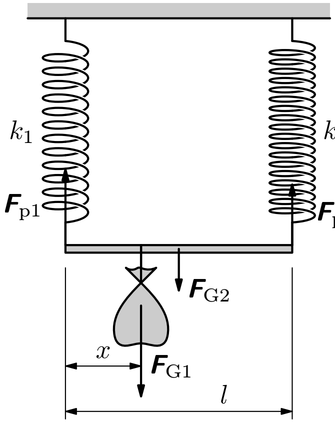
Doba letu kosmické lodi v prvním případě je $\frac{T_1}{2} = 281$ dní, v druhém případě $\frac{T_2}{2} = 237$ dní.



Obr. R1

3 body

2. a) Označme $\boldsymbol{F}_{p1}$, $\boldsymbol{F}_{p2}$ síly, kterými působí pružiny na tyč, $\boldsymbol{F}_{G1} = M\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{F}_{G2} = m\boldsymbol{g}$ tíhové síly (obr. R2).



Obr. R2

Podle momentové věty platí

$$F_{p1} \cdot l = F_{G1} \cdot (l - x) + F_{G2} \cdot \frac{l}{2}, \qquad F_{p2} \cdot l = F_{G1} \cdot x + F_{G2} \cdot \frac{l}{2},$$

z čehož $F_{p1} = Mg\frac{l-x}{l} + \frac{1}{2}mg$, $F_{p2} = Mg\frac{x}{l} + \frac{1}{2}mg$.

Protože tyč je uchycená na pružinách, platí také $F_{p1} = k_1 y_1$, $F_{p2} = k_2 y_2$. Má-li tyč zůstat ve vodorovné poloze, musí platit $y_1 = y_2$, tj.

$$\left(Mg\frac{l-x}{l} + \frac{1}{2}mg\right)\frac{1}{k_1} = \left(Mg\frac{x}{l} + \frac{1}{2}mg\right)\frac{1}{k_2},$$

z čehož

$$x = \frac{Mk_2 + \frac{1}{2}m(k_2 - k_1)}{M(k_1 + k_2)}l = \frac{k_2(2M + m) - k_1 m}{2M(k_1 + k_2)}l.$$

Diskuze: Výsledek řešení vyhovuje úloze, jestliže $0 \le x \le l$. Musí tedy platit

$$k_2(2M + m) - k_1 m \ge 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{k_2}{k_1} \ge \frac{m}{2M + m}$$

a současně

$$\frac{k_2(2M + m) - k_1 m}{2M(k_1 + k_2)} \le 1 \quad \Rightarrow \quad k_2(2M + m) - k_1 m \le 2M(k_1 + k_2),$$

$$\frac{k_2}{k_1} \le \frac{2M + m}{m}.$$

Pro dané hodnoty k_1, k_2, m a M jsou tyto podmínky splněny a po dosazení dostaneme $x = 14$ cm.

Pružiny se prodlouží o $y = y_1 = y_2 = \dfrac{F_{G1} + F_{G2}}{k_1 + k_2} = \dfrac{(M+m)g}{k_1 + k_2} = 12$ cm.

4 body

b) Má-li platit $y_1 = y_2$, pak $\dfrac{m_1 g}{k_1} = \dfrac{m_2 g}{k_2}$. Z toho $p = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{k_1}{k_2}$. Pro dané hodnoty je $p = 0{,}5$.

1 bod

c) Po rozdělení broků do dvou sáčků platí $m_1/m_2 = p, \qquad m_1 + m_2 = M$. Z toho

$$m_1 = \frac{pM}{1+p}, \qquad m_2 = \frac{M}{1+p}.$$

Celková elastická energie pružin je

$$E = \frac{1}{2}k_1 y_1^2 + \frac{1}{2}k_2 y_2^2 = \frac{m_1^2 g^2}{2k_1} + \frac{m_2^2 g^2}{2k_2} =$$

$$= \frac{M^2 g^2}{2}\left(\frac{p^2}{k_1(1+p)^2} + \frac{1}{k_2(1+p)^2}\right) = \frac{M^2 g^2}{2k_1 k_2} \cdot \frac{k_2 p^2 + k_1}{(1+p)^2}.$$

2 body

Nyní tento výraz zderivujeme podle p. Dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p} = \frac{M^2 g^2}{2k_1 k_2} \cdot \frac{2k_2 p(1+p)^2 - (k_2 p^2 + k_1) \cdot 2(1+p)}{(1+p)^4} = \frac{M^2 g^2}{2k_1 k_2} \cdot \frac{2(k_2 p - k_1)}{(1+p)^3}.$$

Položíme-li tuto druhou derivaci rovnou nule a vyjádříme p, dostaneme

$$p = \frac{k_1}{k_2}.$$

Pro $p > k_1/k_2$ je $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p} > 0$, funkce je rostoucí. Pro $p < k_1/k_2$ je $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p} < 0$, funkce je klesající.

Pro $p = \dfrac{k_1}{k_2}$ je tedy celková elastická energie pružin minimální a má hodnotu

$$E_{\min} = \frac{M^2 g^2}{2k_1 k_2} \cdot \frac{k_2 \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 + k_1}{(1 + \frac{k_1}{k_2})^2} = \frac{M^2 g^2}{2(k_1 + k_2)}.$$

Pro dané hodnoty je $E_{\min} = 0{,}25$ J.

Celková elastická energie pružin je maximální v krajních případech, tedy buď pro $p = 0$, kdy má hodnotu $E = \dfrac{M^2 g^2}{2k_2}$, nebo pro $p = \infty$, kdy má hodnotu $E = \dfrac{M^2 g^2}{2k_1}$. V našem případě je $E_{\max} = 0{,}75$ J pro $p = \infty$.

Poznámka

Minimum elastické energie tedy nastává pro situaci, kdy $y_1 = y_2$, což plyne z výsledku úlohy b).

3 body

3. a) Ze stavové rovnice ideálního plynu odvodíme:

$$p_0V_1 = n_1RT_1\,, \qquad p_0V_2 = n_2RT_2\,, \qquad p_0V = R(n_1T_1 + n_2T_2)\,,$$

kde $n_1 = m_1/M_{\mathrm{m}1} = 1{,}4881$ mol, $n_2 = m_2/M_{\mathrm{m}2} = 0{,}500$ mol jsou látková množství vodíku a kyslíku. Z toho

$$p_0 = \frac{R(n_1T_1 + n_2T_2)}{V} = 2{,}69\cdot 10^5\ \mathrm{Pa}\,,$$

$$V_1 = V\frac{n_1T_1}{n_1T_1 + n_2T_2} = 13{,}8\ \mathrm{dm}^3\,, \qquad V_2 = V\frac{n_2T_2}{n_1T_1 + n_2T_2} = 6{,}2\ \mathrm{dm}^3\,.$$

3 body

b) Protože nádoba je dokonale tepelně izolovaná, je celková vnitřní energie U obou plynů konstantní. Ze zákona zachování energie plyne

$$U = \frac{5}{2}n_1RT_1 + \frac{5}{2}n_2RT_2 = \frac{5}{2}(n_1 + n_2)RT \quad \Rightarrow \quad T = \frac{n_1T_1 + n_2T_2}{n_1 + n_2} = 325\ \mathrm{K}\,.$$

Po vyrovnání teplot je objem jednoho molu vodíku stejný jako objem jednoho molu kyslíku. Platí

$$V_1' : V_2' : V = n_1 : n_2 : (n_1 + n_2)\,,$$

$$V_1' = \frac{n_1V}{n_1 + n_2} = 15{,}0\ \mathrm{dm}^3\,, \qquad V_2' = \frac{n_2V}{n_1 + n_2} = 5{,}0\ \mathrm{dm}^3\,,$$

$$p'V_1' + p'V_2' = p'V = (n_1 + n_2)RT = n_1RT_1 + n_2RT_2\,,$$

$$p' = \frac{R(n_1T_1 + n_2T_2)}{V} = p_0\,.$$

4 body

c) Podle předpokladu píst vede teplo slabě, proto se teploty vyrovnávají pomalu a děj můžeme považovat za rovnovážný. Jestliže v určitém okamžiku teplota vodíku stoupne na hodnotu $T_1^\star$ a teplota kyslíku klesne na hodnotu $T_2^\star$, platí podle zákona zachování energie

$$U = \frac{5}{2}n_1RT_1^\star + \frac{5}{2}n_2RT_2^\star = \frac{5}{2}n_1RT_1 + \frac{5}{2}n_2RT_2 = \mathrm{konst.}$$

Tlak plynů v daném okamžiku je $p^\star = \dfrac{R(n_1T_1^\star + n_2T_2^\star)}{V} = \dfrac{R(n_1T_1 + n_2T_2)}{V} = p_0\,.$
Tlak plynů v nádobě se tedy během děje nemění, jedná se tedy u vodíku, jehož teplota vzroste, o izobarickou expanzi a u kyslíku, jehož teplota poklesne, o izobarickou kompresi. Teplo Q, které kyslík předá vodíku, je rovno součtu přírůstku vnitřní energie vodíku a práce vykonané vodíkem při posunutí pístu. Platí

$$Q = \frac{5}{2}n_1R(T - T_1) + p_0(V_1' - V_1) = \frac{5}{2}n_1R(T - T_1) + n_1R(T - T_1) =$$
$$= \frac{7}{2}n_1R(T - T_1) = \frac{7n_1n_2}{2(n_1 + n_2)}R(T_2 - T_1) = 1\,090\ \mathrm{J}\,.$$

3 body

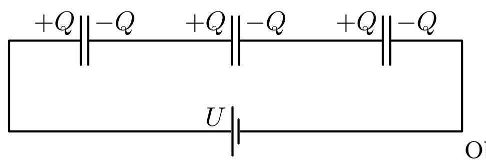
4. a) Po připojení kondenzátorů ke zdroji bylo na každém z nich stejné napětí $U/3$ a na jejich deskách byly stejné náboje o velikosti $+Q$ a $-Q$ (obr. R3).

$$Q = \frac{CU}{3} .$$

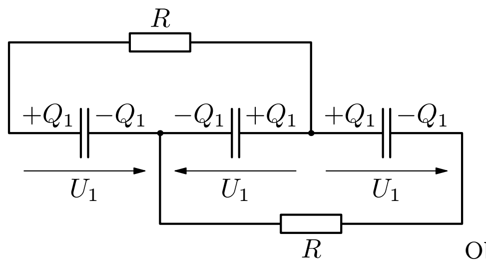
Po odpojení zdroje a připojení rezistorů dojde k přenosu nábojů mezi deskami kondenzátorů, které tvoří dvě samostatné izolované soustavy (obr R4). Do první patří levá deska levého kondenzátoru, pravá deska prostředního kondenzátoru a levá deska pravého kondenzátoru. Do druhé patří zbývající desky. Po proběhnutí přechodného děje zaniknou proudy v rezistorech a spojené desky budou mít stejný potenciál. Napětí na všech třech kondenzátorech bude mít stejnou velikost U_1, ovšem na prostředním kondenzátoru bude jeho polarita opačná než na počátku děje. Náboje na deskách všech tří kondenzátorů budou proto mít stejnou velikost $+Q_1$ a $-Q_1$. Ze zákona zachování náboje plyne

$$Q = 3Q_1 , \qquad U_1 = \frac{Q_1}{C} = \frac{Q}{3C} = \frac{U}{9} .$$

4 body



Obr. R3



Obr. R4

b) Joulovo teplo Q_j, které se během přechodného děje uvolní na obou rezistorech, je rovno rozdílu energie kondenzátorů na začátku a na konci děje:

$$Q_\mathrm{j} = 3 \cdot \frac{1}{2} C \left(\frac{U}{3} \right)^2 - 3 \cdot \frac{1}{2} C U_1^2 = \frac{4}{27} C U^2 .$$

Na každém z rezistorů se uvolní teplo $\frac{2}{27} CU^2$.

3 body

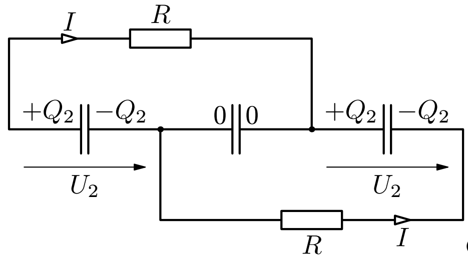
c) Napětí na prostředním kondenzátoru mění v určitém okamžiku přechodného děje polaritu. V tomto okamžiku je nulové a situaci znázorňuje obr. R5. Na krajních kondenzátorech je v tomto okamžiku stejné napětí U_2 a na jejich deskách jsou náboje $+Q_2$ a $-Q_2$. Podle zákona zachování náboje platí

$$2Q_2 = Q\,, \qquad U_2 = \frac{Q_2}{C} = \frac{Q}{2C} = \frac{U}{6}\,.$$

Stejné je v daném okamžiku i napětí na rezistorech, takže jimi prochází proud

$$I = \frac{U_2}{R} = \frac{U}{6R}\,.$$

3 body



Obr. R5