Řešení úloh 1. kola 50. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie A*

Autoři úloh: J. Jírů (3), P. Šedivý (1, 2, 5, 6, 7), 4. úloha je převzata z Moskevské FO.

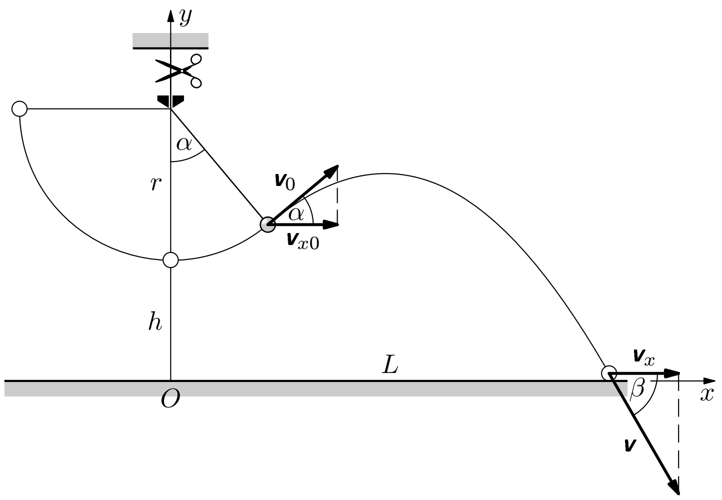
1. a) Zvolme vztažnou soustavu podle obr. R1. Po přestřižení vlákna koná kulička šikmý vrh s počáteční rychlostí $\boldsymbol{v}_0$ a elevačním úhlem α. Velikost počáteční rychlosti určíme ze zákona zachování energie:

$$mgr\cos\alpha = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{2gr\cos\alpha} = 3{,}877\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,. \tag{1}$$

Během vrhu platí pro souřadnice kuličky

$$x = r\sin\alpha + v_0 t\cos\alpha\,, \tag{2}$$

$$y = h + r(1-\cos\alpha) + v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2\,. \tag{3}$$



Obr. R1

V okamžiku dopadu je $y = 0$. Z toho určíme dobu vrhu:

$$\frac{1}{2}gt^2 - v_0\sin\alpha\cdot t - h - r(1-\cos\alpha) = 0\,;$$

úloze vyhovuje kladný kořen

$$t = \frac{v_0\sin\alpha + \sqrt{v_0^2\sin^2\alpha + 2g[h + r(1-\cos\alpha)]}}{g} =$$

$$= \frac{\sqrt{2gr\cos\alpha}\sin\alpha + \sqrt{2gr\cos\alpha\sin^2\alpha + 2g[h + r(1-\cos\alpha)]}}{g} = 0{,}779\ \mathrm{s}\,. \tag{4}$$

Dosazením do (2) dostaneme hledanou vzdálenost $L = 2{,}96$ m.

3 body

b) Velikost rychlosti dopadu určíme užitím zákona zachování mechanické energie:

$$mg(h+r) = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2g(h+r)} = 5{,}94 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \,.$$

Vodorovná složka rychlosti je během vrhu konstantní a má velikost

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos\alpha = 2{,}97 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \,.$$

Rychlost dopadu je odchýlena od vodorovného směru o úhel

$$\beta = \arccos\frac{v_x}{v} = 60{,}0^\circ \,.$$

3 body

c) Dosazením vzorců (4) a (2) do tabulky Excelu, jejich kopírováním a postupným zjemňováním dělení intervalu dostaneme výsledek:

α	t / s	L / m	α	t / s	L / m	α	t / s	L / m
0	0,40386	1,78885	33	0,72191	3,00058	50	0,83662	2,67581
5	0,44599	2,05139	34	0,73070	3,00234	55	0,85327	2,46096
10	0,49284	2,30709	34,2	0,73243	3,00236	60	0,86087	2,21419
15	0,54292	2,54178	34,4	0,73416	3,00227	65	0,85897	1,95164
20	0,59445	2,74055	34,6	0,73588	3,00208	70	0,84715	1,69026
25	0,64556	2,88980	34,8	0,73759	3,00177	75	0,82474	1,44694
30	0,69440	2,97888	35	0,73929	3,00135	80	0,79020	1,23808
31	0,70375	2,98883	40	0,77874	2,95550	85	0,73846	1,08036
32	0,71292	2,99607	45	0,81152	2,84445	90	0,60578	1,00000

Kulička dopadne do největší vzdálenosti $L_{\max} = 3{,}0024$ m $\doteq 3{,}00$ m, jestliže vlákno přestřihneme při dosažení úhlu $\alpha = 34{,}2^\circ \doteq 34^\circ$.

4 body

2. a) Jestliže třetí závaží klesne do hloubky h, vystoupí obě krajní závaží do výšky $\sqrt{d^2+h^2}-d$. Soustava bude mít potenciální energii

$$E_\mathrm{p} = 2mg(\sqrt{d^2+h^2}-d) - mgh = mg(2\sqrt{d^2+h^2}-2d-h)\,.$$

2 body

b) Kinetická energie soustavy se nejprve zvětšuje, pak zmenšuje a v dolní úvrati je opět nulová. Jsou-li splněny podmínky zadání, můžeme ztráty mechanické energie během prvního pohybu dolů zanedbat a použít zákon zachování mechanické energie. V dolní úvrati tedy platí

$$2\sqrt{d^2+h_\mathrm{m}^2}-2d-h_\mathrm{m}=0\,.$$

Úpravou dostaneme rovnici $3h_\mathrm{m}^2-4h_\mathrm{m}d=0$. Úloze vyhovuje kořen

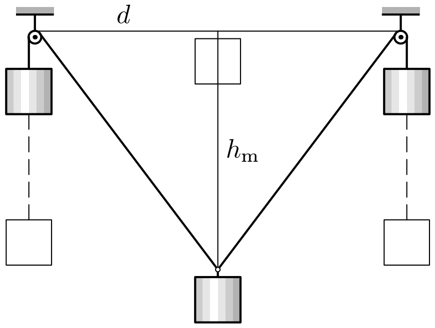
$$h_\mathrm{m}=\frac{4}{3}d\,.$$

Délka vláken mezi kladkou a třetím závažím v dolní úvrati je

$$\sqrt{d^2+\frac{16}{9}d^2}=\frac{5}{3}d<2d\,.$$

Krajní závaží se tedy zastaví před dosažením kladek (obr. R2).

2 body



Obr. R2

c) V rovnovážné poloze (obr. R3) jsou výslednice sil působících na jednotlivá závaží nulové. Tahová síla vlákna má stejnou velikost jako tíha závaží a platí

$$mg = 2T\sin\alpha = 2mg\sin\alpha \quad\Rightarrow\quad \sin\alpha=\frac{1}{2}\,,\quad \alpha=30^\circ\,,\quad h_0=d\,\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{d}{\sqrt{3}}\,.$$

Soustava získává kinetickou energii na úkor energie potenciální. Během pohybu je tedy celková potenciální energie záporná. Platí

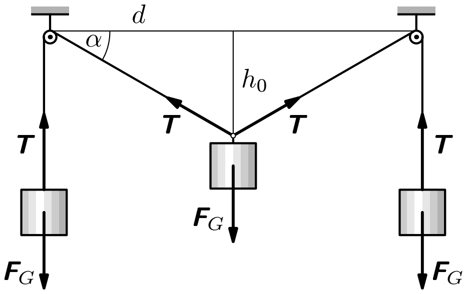
$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}h}=mg\left[(d^2+h^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2h-1\right].$$

Snadno se přesvědčíme, že pro $h=h_0=\dfrac{d}{\sqrt{3}}$ je $\dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}h}=0$,

pro $0<h<h_0$ je $\dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}h}<0$ a pro $h_0<h<h_\mathrm{m}$ je $\dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}h}>0$. V rovnovážné poloze je tedy potenciální energie soustavy minimální a má hodnotu

$$E_\mathrm{p}(h_0) = 2mgd\left(\sqrt{\frac{4}{3}} - 1\right) - mg\frac{d}{\sqrt{3}} = mgd(\sqrt{3} - 2)\,.$$

2 body



Obr. R3

d) Druhým derivováním dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}^2E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}h^2} = mg\left[-\frac{1}{2}(d^2+h^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2h\cdot 2h + (d^2+h^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2\right] = 2mgd^2(d^2+h^2)^{-\frac{3}{2}}\,.$$

V bodě $h_0 = \dfrac{d}{\sqrt{3}}$ je $\dfrac{\mathrm{d}^2E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}h^2} = \dfrac{mg}{d}\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

V okolí rovnovážné polohy tedy platí

$$E_\mathrm{p}(h_0 + \mathrm{d}h) = E_\mathrm{p}(h_0) + \frac{mg}{d}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{8}\cdot(\mathrm{d}h)^2\,.$$

2 body

e) Energie, kterou získá soustava malým vychýlením třetího závaží z rovnovážné polohy působením vnější síly, je rovna energii kmitání, které následuje po jeho uvolnění. Výchylka třetího závaží je rovna amplitudě jeho kmitů. Označme ji y_m. Krajní závaží budou v důsledku neroztažitelnosti vlákna kmitat s amplitudou $y_\mathrm{m}\sin 30^\circ = y_\mathrm{m}/2$. Při průchodu rovnovážnou polohou bude mít třetí závaží rychlost $v_\mathrm{m} = \omega y_\mathrm{m}$, krajní závaží budou mít při průchodu rovnovážnými polohami rychlost poloviční. Energie kmitů je

$$\frac{mg}{d}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{8}\cdot y_\mathrm{m}^2 = \frac{1}{2}mv_\mathrm{m}^2 + 2\cdot\frac{1}{2}m\left(\frac{v_\mathrm{m}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}m\omega^2y_\mathrm{m}^2\,.$$

Z toho

$$\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{g}{d}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{2d}{g\sqrt{3}}}\,.$$

2 body

3. a) Zákon zachování hybnosti a zákon zachování mechanické energie dávají pro první ráz rovnice

$$m_1v_0 = m_1u_1 + mu\,, \qquad \frac{1}{2}m_1v_0^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}mu^2\,.$$

Z rovnic dostaneme souřadnice rychlosti levé a prostřední koule po první srážce:

$$u_1 = \frac{m_1 - m}{m_1 + m}v_0\,, \tag{1}$$

$$u = \frac{2m_1}{m_1 + m}v_0\,. \tag{2}$$

Druhá srážka probíhá analogicky, stačí v rovnicích (1) a (2) provést substituci $m_1 \to m,\ m \to m_2,\ v_0 \to u,\ u_1 \to w,\ u \to w_2$:

$$w = \frac{m - m_2}{m + m_2}u\,, \tag{3}$$

$$w_2 = \frac{2m}{m + m_2}u\,. \tag{4}$$

Dosazením proměnné u z rovnice (2) do rovnic (3) a (4) dostaneme:

$$w = \frac{2m_1(m - m_2)}{(m + m_1)(m + m_2)}v_0\,, \tag{5}$$

$$w_2 = \frac{4mm_1}{(m + m_1)(m + m_2)}v_0\,. \tag{6}$$

3 body

Nyní budeme hledat hodnotu proměnné hmotnosti m, pro kterou bude rychlost w_2 maximální. Funkci danou rovnicí (6) derivujeme podle m:

$$\frac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}m} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}m}\,\frac{4mm_1}{m^2 + (m_1 + m_2)m + m_1m_2}v_0 =$$

$$= \frac{4m_1\left[m^2 + (m_1 + m_2)m + m_1m_2\right] - 4m_1m(2m + m_1 + m_2)}{\left[m^2 + (m_1 + m_2)m + m_1m_2\right]^2}v_0 =$$

$$= \frac{4m_1(m_1m_2 - m^2)}{\left[m^2 + (m_1 + m_2)m + m_1m_2\right]^2}v_0\,.$$

Derivace je nulová pro

$$m = \sqrt{m_1m_2}\,. \tag{7}$$

Pro $m < \sqrt{m_1m_2}$ je derivace kladná a funkce je tedy rostoucí, pro $m > \sqrt{m_1m_2}$ je derivace záporná a funkce je tedy klesající. Nalezený extrém je tedy maximem. Ke stejnému závěru můžeme dojít užitím druhé derivace. Číselně vychází $m = 3{,}00$ kg. Při záměně hmotností m_1 a m_2 se výsledek nezmění.

3 body

b) Dosazením vztahu (7) do vztahů (1), (5) a (6) dostaneme

$$u_1 = \frac{\sqrt{m_1} - \sqrt{m_2}}{\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2}} v_0 = \frac{1}{5} v_0 = 0{,}20 v_0 \,,$$

$$w = \frac{2\sqrt{m_1}\,(\sqrt{m_1} - \sqrt{m_2})}{(\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2})^2} v_0 = \frac{6}{25} v_0 = 0{,}24 v_0 \,,$$

$$w_2 = \frac{4m_1}{(\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2})^2} v_0 = \frac{36}{25} v_0 = 1{,}44 v_0 \,.$$

Záměnou hmotností dostaneme

$$u_1 = -\frac{1}{5} v_0 = -0{,}20 v_0 \,, \quad w = -\frac{4}{25} v_0 = -0{,}16 v_0 \,, \quad w_2 = \frac{16}{25} v_0 = 0{,}64 v_0 \,.$$

2 body

c) Hledáme poměr

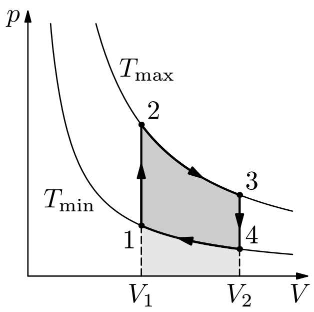
$$\frac{E_{k2}}{E_{k1}} = \frac{\frac{1}{2} m_2 w_2^2}{\frac{1}{2} m_1 v_0^2} \,.$$

Dosazením ze vztahů (6) a (7) dostaneme

$$\frac{E_{k2}}{E_{k1}} = \frac{16 m_1 m_2}{(\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2})^4} = \frac{576}{625} = 0{,}922 \,.$$

Při záměně hmotností se výsledek nezmění. **2 body**

4. a)



Obr. R4

p-V diagram kruhového děje je na obr. R4. Teplota během cyklu roste jen při izochorickém ohřátí $1 \to 2$ a klesá jen při izochorickém ochlazení $3 \to 4$. Při izotermických dějích se nemění. Plyn má tedy teplotu T_{min} při izotermické kompresi $4 \to 1$ a teplotu T_{max} při izotermické expanzi $2 \to 3$. Teplo získané při izochorickém ohřátí je rovno přírůstku vnitřní energie:

$$Q_1 = \Delta U = \frac{3}{2} nR (T_{max} - T_{min}) \,.$$

Z toho $$T_{max} = T_{min} + \frac{Q_1}{\frac{3}{2} nR} \,.$$

3 body

b) Při izochorickém ochlazení $3 \rightarrow 4$ je teplo Q_1' odevzdané plynem rovno úbytku vnitřní energie:

$$Q_1' = -\Delta U = \frac{3}{2} nR(T_{\max} - T_{\min}) = Q_1 \,.$$

Teplo Q_2' odevzdané plynem při izotermické kompresi $4 \rightarrow 1$ je rovno práci, kterou při ní plyn spotřebuje. Teplo Q_2 přijaté při izotermické expanzi $2 \rightarrow 3$ je rovno práci, kterou při ní plyn vykoná. Obě práce jsou číselně rovny obsahu obrazce omezeného v grafu příslušnou izotermou. Rovnice izoterm odvodíme ze stavové rovnice:

$$p_{\mathrm{h}} = \frac{nRT_{\max}}{V} \quad \text{pro horní izotermu,} \quad p_{\mathrm{d}} = \frac{nRT_{\min}}{V} \quad \text{pro horní izotermu.}$$

Pro kterýkoliv objem V je $p_{\mathrm{d}}/p_{\mathrm{h}} = T_{\min}/T_{\max}$. Ve stejném poměru jsou tedy i plochy omezené v daném úseku oběma izotermami. Proto

$$\frac{Q_2'}{Q_2} = \frac{T_{\min}}{T_{\max}} \,, \qquad Q_2' = Q_2 \frac{T_{\min}}{T_{\max}} = \frac{\frac{3}{2} nRT_{\min} Q_2}{\frac{3}{2} nRT_{\min} + Q_1} \,.$$

Ke stejnému výsledku můžeme dojít také porovnáním vztahů

$$Q_2 = nRT_{\max} \ln \frac{V_2}{V_1} \,, \qquad Q_2' = nRT_{\min} \ln \frac{V_2}{V_1} \,,$$

kde V_1, V_2 jsou objemy plynu při izochorickém ohřátí a při izochorickém ochlazení.

3 body

c) Celková práce plynu během jednoho cyklu je rovna rozdílu přijatého a odevzdaného tepla:

$$W' = Q_1 + Q_2 - (Q_1' + Q_2') = Q_2 - Q_2' = Q_2 \left(1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}}\right) = \frac{Q_1 Q_2}{\frac{3}{2} nRT_{\min} + Q_1} \,.$$

2 body

d) Termodynamická účinnost cyklu je

$$\eta = \frac{W'}{Q_1 + Q_2} = \frac{Q_1 Q_2}{(Q_1 + Q_2)\left(\frac{3}{2} nRT_{\min} + Q_1\right)} \,.$$

2 body

5. a) Označme náboje a napětí na jednotlivých kondenzátorech podle obr. R5. Ze zákona zachování náboje plyne

$$Q_1 + Q_4 = Q_2 + Q_5\,,$$
$$Q_2 - Q_3 - Q_1 = 0\,.$$

Z toho

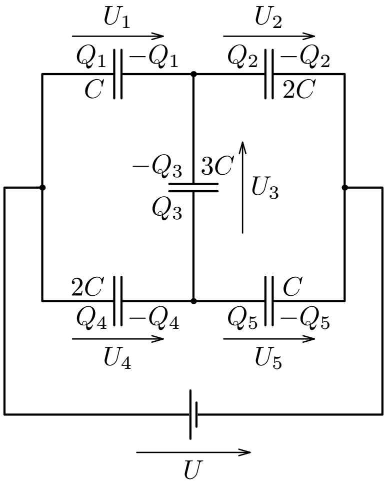
$$CU_1 + 2CU_4 = 2CU_2 + CU_5\,,$$
$$2CU_2 - 3CU_3 - CU_1 = 0\,.$$

Po úpravě

$$U_1 + 2U_4 = 2U_2 + U_5\,, \qquad (1)$$
$$2U_2 - 3U_3 - U_1 = 0\,. \qquad (2)$$

Dále platí:

$$U_1 + U_2 = U\,, \qquad (3)$$
$$U_4 + U_5 = U\,, \qquad (4)$$
$$U_4 + U_3 = U_1\,. \qquad (5)$$



Obr. R5

4 body

Řešením soustavy rovnic dostaneme:

$$U_1 = U_5 = \frac{5}{9}U\,, \quad U_2 = U_4 = \frac{4}{9}U\,, \quad U_3 = \frac{1}{9}U\,.$$

3 body

b) Ze zdroje přejde po sepnutí spínače na soustavu kondenzátorů náboj

$$Q = Q_1 + Q_4 = CU_1 + 2CU_4 = C \cdot \frac{5}{9}U + 2C \cdot \frac{4}{9}U = \frac{13}{9}CU\,.$$

Soustava má tedy celkovou kapacitu $\frac{13}{9}C$.

3 body

Poznámka: Výsledky řešení platí jen omezenou dobu po sepnutí spínače. Při trvalém zapojení soustavy kondenzátorů ke zdroji konstantního stejnosměrného napětí se uplatní svodové odpory jednak v dielektriku kondenzátorů, jednak v konstrukci, která soustavu nese (např. v desce plošných spojů). Jimi procházejí nepatrné proudy, které některé kondenzátory vybíjejí, jiné nabíjejí. Po dlouhé době se napětí v jednotlivých větvích upraví, jako by zde byla jen síť svodových odporů.

6. Na tyč působí tři síly: tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$, tažná síla provázku $\boldsymbol{F}_2$ a reakce podložky $\boldsymbol{F}_1$. Z podmínek rovnováhy plyne, že jejich vektorové přímky se protínají v jediném bodě (obr. R6). V okamžiku, kdy konec tyče začne klouzat po podložce, splňují velikosti vodorovné a svislé složky síly $\boldsymbol{F}_1$ vztah $F_\mathrm{t} = fF_\mathrm{n}$, kde f je součinitel smykového tření mezi tyčí a podložkou, a pro odchylku φ této síly od svislého směru platí

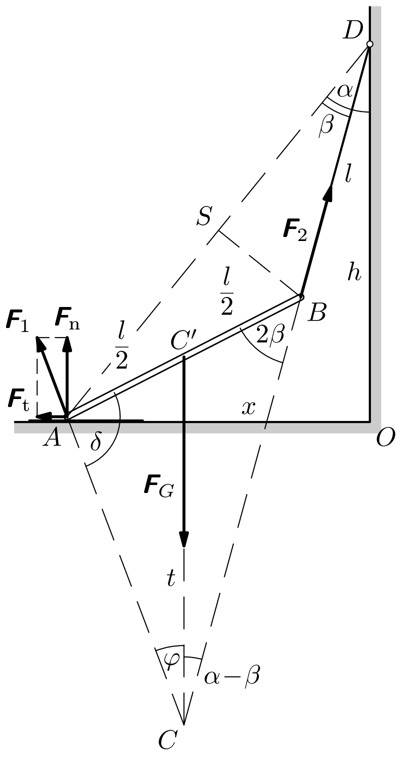
$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{F_\mathrm{t}}{F_\mathrm{n}} = f\,.$$

Na trojúhelníky ACC', BCC' použijeme sinovou větu. Platí

$$\frac{0{,}5l}{t} = \frac{\sin\varphi}{\sin\delta} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin 2\beta}\,,$$

$$\delta = 180^\circ - \alpha - \beta - \varphi\,,$$

Postupnými úpravami dostaneme



Obr. R6

$$\sin\varphi\cdot\sin 2\beta = \sin(\alpha-\beta)\cdot\sin(\alpha+\beta+\varphi) =$$
$$= \sin(\alpha-\beta)\,[\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos\varphi + \cos(\alpha+\beta)\cdot\sin\varphi]\,,$$

$$\sin\varphi\,[\sin 2\beta - \sin(\alpha-\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta)] = \cos\varphi\cdot\sin(\alpha-\beta)\cdot\sin(\alpha+\beta)\,,$$

$$f = \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\sin(\alpha-\beta)\cdot\sin(\alpha+\beta)}{\sin 2\beta - \sin(\alpha-\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\cos 2\beta - \cos 2\alpha}{3\sin 2\beta - \sin 2\alpha}\,.$$

Úhly α a β určíme z pravoúhlých trojúhelníků AOD a ABS:

$$\alpha = \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}\,, \qquad \beta = \arccos\frac{\sqrt{x^2+h^2}}{2l}\,.$$

7. Nejprve určíme poloměr R_1 první kulové plochy. Z Pythagorovy věty dostaneme

$$R_1^2 = r^2 + \left(R_1 - \frac{r}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad R_1 = \frac{5}{4}r\,.$$

1 bod

1. způsob řešení — zobrazení prvním a druhým kulovým rozhraním vyšetříme postupně (obr. R7)

Vyjdeme ze zobrazovací rovnice kulového rozhraní o poloměru R, které odděluje dvě prostředí o indexech lomu n_1, n_2, ze vztahu pro výpočet předmětové ohniskové vzdálenosti a vztahu pro výpočet příčného zvětšení β:

$$n_1\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{a}\right) = n_2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{a'}\right)\,, \quad f = \frac{n_1 R}{n_2 - n_1}\,, \quad \beta = -\frac{f}{a - f}\,.$$

Vzhledem ke znaménkové konvenci bereme oba poloměry kulových rozhraní jako záporné.

1. rozhraní: $R = -\frac{5}{4}r$, $n_1 = 1$, $n_2 = n = 1{,}5 = \frac{3}{2}$, $a_1 = \frac{r}{2}$.

$$1 \cdot \left(-\frac{4}{5r} + \frac{2}{r}\right) = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{4}{5r} - \frac{1}{a_1'}\right) \quad \Rightarrow \quad a_1' = -\frac{5}{8}r = -3{,}125\ \text{cm}\,,$$

$$f_1 = \frac{1 \cdot \left(-\frac{5}{4}r\right)}{\frac{1}{2}} = -\frac{5}{2}r = -12{,}5\ \text{cm}\,, \quad \beta_1 = -\frac{-\frac{5}{2}r}{\frac{1}{2}r + \frac{5}{2}r} = \frac{5}{6} = 0{,}833\,.$$

4 body

2. rozhraní: $R = -r$, $n_2 = 1$, $n_1 = n = 1{,}5 = \frac{3}{2}$, $a_2 = \frac{5r}{8} + \frac{r}{2} = \frac{9}{8}r$.

$$\frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{r} + \frac{8}{9r}\right) = 1 \cdot \left(-\frac{1}{r} - \frac{1}{a_2'}\right) \quad \Rightarrow \quad a_2' = -\frac{6}{5}r = -6\ \text{cm}\,,$$

$$f_2 = \frac{\frac{3}{2} \cdot (-r)}{-\frac{1}{2}} = 3r = 15\ \text{cm}\,, \quad \beta_2 = -\frac{3r}{\frac{9}{8}r - 3r} = \frac{8}{5} = 1{,}6\,.$$

4 body

Výsledné příčné zvětšení je $\beta = \beta_1\beta_2 = \frac{4}{3}$. Výsledný obraz tedy leží před čočkou, je zdánlivý, vzpřímený a zvětšený. **1 bod**

2. způsob řešení — použijeme zobrazovací rovnici tlusté čočky (obr. R8).

Parametry tlusté čočky jsou $R_1 = -\frac{5}{4}r$, $R_2 = -r$, $d = \frac{r}{2}$, $n_1 = 1$, $n_2 = \frac{3}{2}$.

Nejprve určíme ohniskovou vzdálenost a polohu hlavních bodů:

$$f = \frac{n_1 n_2 R_1 R_2}{(n_2 - n_1)[(n_2 - n_1)d + n_2(R_2 - R_1)]} = \frac{1 \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{5}{4}r\right) \cdot (-r)}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{r}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{r}{4}\right)} = 6r = 30 \text{ cm},$$

$$a_1(H) = \frac{n_1 R_1 d}{(n_2 - n_1)d + n_2(R_2 - R_1)} = \frac{1 \cdot \left(-\frac{5}{4}r\right) \cdot \frac{r}{2}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{r}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{r}{4}} = -r = -5 \text{ cm},$$

$$a_2'(H') = -\frac{n_1 R_2 d}{(n_2 - n_1)d + n_2(R_2 - R_1)} = \frac{1 \cdot (-r) \cdot \frac{r}{2}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{r}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{r}{4}} = -\frac{4}{5}r = -4 \text{ cm}.$$

4 body

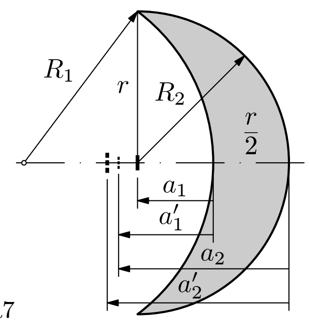
Pak použijeme Gaussovu zobrazovací rovnici

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f}, \quad \text{kde} \quad a = a_1 - a_1(H) = \frac{3}{2}r.$$

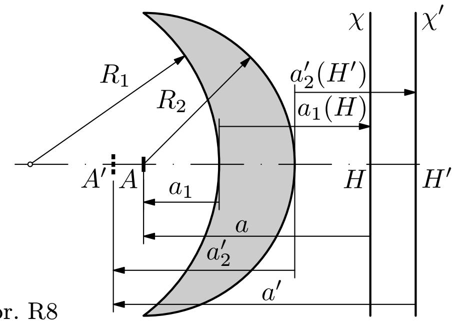
Z toho $a' = \dfrac{af}{a - f} = \dfrac{\frac{3r}{2} \cdot 6r}{-\frac{9r}{2}} = -2r, \quad a_2' = a' - a_2'(H') = -\dfrac{6}{5}r = -6 \text{ cm}.$

4 body

Příčné zvětšení obrazu je $\beta = -\dfrac{a'}{a} = \dfrac{4}{3}$. **1 bod**



Obr. R7



Obr. R8