Řešení úloh krajského kola 50. ročníku fyzikální olympiády.

Kategorie D

Autoři úloh: M. Jarešová (1), J. Jírů (3, 4,) a Ľ. Konrád (2)

1. a) Průměrná rychlost $v_\mathrm{p} = \dfrac{s}{t} = \dfrac{12\,000\ \mathrm{m}}{720\ \mathrm{s}} = 16{,}7\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 60\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$.

1 bod

b) Celková doba pohybu $t = t_1 + t_2 + t_3 = t_1 + 2t_1 + t_1 = 4t_1$.

Potom $t_1 = \dfrac{t}{4} = 3$ min; $t_2 = \dfrac{t}{2} = 6$ min; $t_3 = t_1$. Délky jednotlivých úseků:

$$s_1 = \frac{1}{2}at_1^2 = \frac{1}{2}a\left(\frac{t}{4}\right)^2 = \frac{1}{32}at^2,$$

$$s_2 = v_\mathrm{m}t_2 = at_1 \cdot 2t_1 = 2at_1^2 = 4s_1,$$

$$s_3 = v_\mathrm{m}t_3 - \frac{1}{2}at_3^2 = at_1^2 - \frac{1}{2}at_1^2 = \frac{1}{2}at_1^2 = s_1.$$

Celková dráha $s = s_1 + s_2 + s_3 = s_1 + 4s_1 + s_1 = 6s_1$.

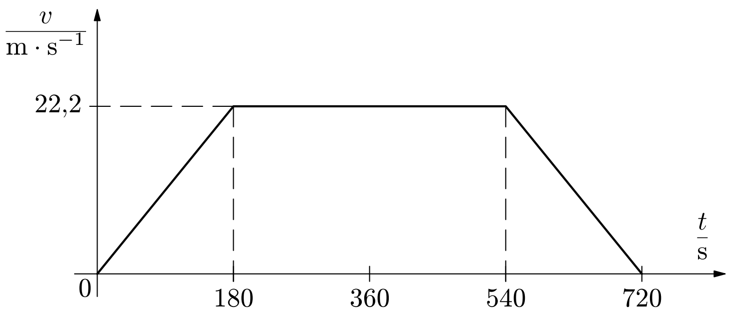
Z toho $s_1 = \dfrac{1}{6}s = 2$ km; $s_2 = \dfrac{4}{6}s = 8$ km; $s_3 = 2$ km.

Zrychlení pohybu určíme např. ze vztahu $s_1 = \dfrac{1}{2}at_1^2$, po dosazení je $\dfrac{1}{6}s = \dfrac{1}{2}a \cdot \dfrac{1}{16}t^2$, z čehož $a = \dfrac{16}{3}\dfrac{s}{t^2} = 0{,}12\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Maximální rychlost $v_\mathrm{m} = at_1 = \dfrac{16}{3}\cdot\dfrac{s}{t^2}\cdot\dfrac{t}{4} = \dfrac{4}{3}\dfrac{s}{t} = 22{,}2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 80\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$.

6 bodů

c) Graf závislosti rychlosti na čase je znázorněn na obr. R1.



Obr. R1

3 body

2. a) Po uvolnění byla velikost zrychlení vozíku $a_1 = g \sin \alpha$. Za dobu t urazil vozík dráhu

$$s_1 = \frac{1}{2} a_1 t^2 = \frac{1}{2} g \sin \alpha \cdot t^2 = 2{,}45\ \mathrm{m}\,.$$

2 body

b) Kvádr se po uvolnění pohyboval se zrychlením o velikosti

$$a_2 = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)\,.$$

Za dobu t urazil dráhu

$$s_2 = \frac{1}{2} a_2 t^2 = s_1 - d\,.$$

Ze vztahu

$$d = s_1 - s_2 = \frac{1}{2}(a_1 - a_2) t^2 = \frac{1}{2} g f t^2 \cos \alpha$$

odvodíme

$$f = \frac{2d}{g t^2 \cos \alpha} = 0{,}24\,.$$

5 bodů

c) V čase t se rychlosti obou těles liší o

$$v_1 - v_2 = (a_1 - a_2) t = g f t \cos \alpha = \frac{2d}{t} = 2{,}0\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}\,.$$

3 body

3. a) Doba letu splňuje podmínku $h = \frac{1}{2}g\left(\frac{t_1}{2}\right)^2$,

z níž plyne

$$t_1 = \sqrt{\frac{8h}{g}} = 1{,}3\ \mathrm{s}\,. \tag{1}$$

2 body

b) Rychlost míčku v okamžiku vrhu rozložíme na vodorovnou složku v_{x0} a svislou složku v_{y0}.

$$v_{x0} = \frac{d}{t_1}\,, \qquad v_{y0} = g\frac{t_1}{2}\,. \tag{2}$$

Po dosazení vztahu (1) do vztahů (2) dostaneme

$$v_{x0} = \sqrt{\frac{gd^2}{8h}}\,, \qquad v_{y0} = \sqrt{2gh}\,. \tag{3}$$

Velikost počáteční rychlosti míčku pak je

$$v_0 = \sqrt{v_{x0}^2 + v_{y0}^2} = \sqrt{\frac{gd^2}{8h} + 2gh} = \sqrt{g\frac{d^2 + 16h^2}{8h}} = 14{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}\,.$$

4 body

c) Velikost rychlosti míče je minimální v nejvyšším bodě trajektorie, kde $v_y = 0$:

$$v_{\min} = v_{x0} = \frac{d}{t_1}\,.$$

Po dosazení vztahu (1) dostaneme

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{gd^2}{8h}} = 12{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}\,.$$

2 body

d) V okamžiku vrhu platí: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_{y0}}{v_{x0}}$.

Užitím vztahů (3) dostaneme

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{4h}{d} = 0{,}500\,, \qquad \alpha = 27^\circ\,.$$

2 body

4. a) Přímo ze zadání dostaneme $v = \dfrac{2\pi R}{T} = 241\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

2 body

b) Z gravitačního zákona dostaneme gravitační zrychlení na povrchu

$$a_\mathrm{g} = \varkappa \frac{M}{R^2} \tag{1}$$

kde M je hmotnost Marsu. Gravitační síla působící na Phobos je silou dostředivou, proto

$$m r_1 \frac{4\pi^2}{T_1^2} = \varkappa \frac{mM}{r_1^2}\,,$$

tedy

$$M = \frac{4\pi^2 r_1^3}{\varkappa T_1^2} \tag{2}$$

Dosazením do vztahu (1) a úpravou dostaneme $a_\mathrm{g} = \dfrac{4\pi^2 r_1^3}{R^2 T_1^2} = 3{,}71\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

4 body

c) Pro únikovou rychlost z povrchu Marsu platí

$$v_\mathrm{p} = \sqrt{2} \cdot v_\mathrm{k} = \sqrt{2} \cdot \frac{2\pi R}{T_2}\,, \tag{3}$$

kde v_k je kruhová rychlost libovolného tělesa obíhajícího bezprostředně při povrchu Marsu a T_2 je jeho doba oběhu. Podle 3. Keplerova zákona pro Phobos a toto těleso platí

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{R^3}\,.$$

Z rovnice dostaneme

$$T_2 = T_1 \sqrt{\frac{R^3}{r_1^3}}\,.$$

Dosazením do vztahu (3) a úpravou dostaneme

$$v_\mathrm{p} = \frac{2\pi}{T_1} \sqrt{\frac{2 r_1^3}{R}} = 5\,020\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}\,.$$

Místo 3. Keplerova zákona lze využít vztah pro kruhovou rychlost

$$v_\mathrm{p} = \sqrt{2} \cdot v_\mathrm{k} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{\varkappa M}{R}}$$

a dosadit hmotnost Marsu z rovnice (2). **4 body**