Řešení úloh krajského kola 50. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie B

Autoři úloh: M. Jarešová (1,2,3), P. Šedivý (4)

1. a) K určení rychlosti $\boldsymbol{v}_1$ střely použijeme zákon zachování hybnosti a zákon zachování mechanické energie. Platí

$$(M+m)v = mv_1, \quad \text{z čehož} \quad v = \frac{m}{m+M}v_1 = \frac{1}{101}v_1,$$

$$(m+M)gh = \frac{1}{2}(m+M)v^2, \text{ kde } h = l(1-\cos\beta).$$

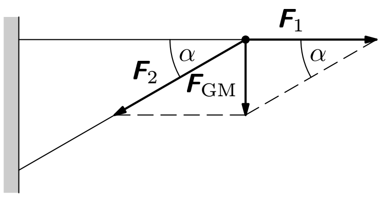
Po dosazení dostaneme

$$v = \sqrt{2gl(1-\cos\beta)}, \quad \text{potom} \quad v_1 = 101v = 101\sqrt{2gl(1-\cos\beta)}.$$

Pro dané hodnoty $v_1 = 58{,}4\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

2 body

b) Výpočet sil, kterými jsou namáhána ramena konzoly před dopadem střely.



Obr. R1

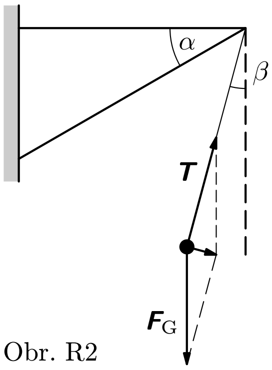
Z obr. R1 vyplývá, že

$$F_1 = \frac{F_{\mathrm{GM}}}{\mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{Mg}{\mathrm{tg}\,\alpha} = 17{,}0\ \mathrm{N},$$

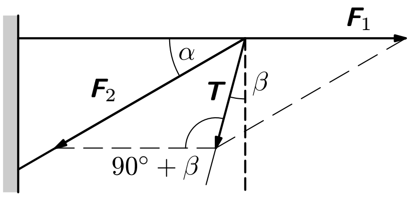
$$F_2 = \frac{F_{GM}}{\sin\alpha} = \frac{Mg}{\sin\alpha} = 19{,}6\ \mathrm{N}.$$

2 body

c) Nejprve určíme velikost tahové síly $\boldsymbol{T}$ (obr. R2), kterou je napínáno vlákno kyvadla a která pak způsobuje silové namáhání konzoly (její velikost je stejná v obou krajních polohách). Z obr. R2 vyplývá, že $T = F_G \cos\beta$.



Obr. R2



Obr. R3

Z obr. R3 odvodíme s užitím sinové věty

$$\frac{T}{\sin\alpha} = \frac{F_2}{\sin(90°+\beta)} = \frac{F_1}{\sin(90°-\alpha-\beta)}.$$

Pak můžeme psát

$$F_2 = \frac{T}{\sin\alpha}\sin(90^\circ + \beta) = \frac{F_G\cos^2\beta}{\sin\alpha} = \frac{(M+m)g\cos^2\beta}{\sin\alpha}.$$

Obdobně také určíme velikost síly F_1:

$$F_1 = \frac{F_G\cos\beta}{\sin\alpha}\sin(90^\circ - \alpha - \beta) = \frac{(M+m)g\cos\beta}{\sin\alpha}\cos(\alpha+\beta).$$

Pro dané hodnoty: $F_1 = 13{,}5$ N, $F_2 = 18{,}5$ N.

Ve druhé krajní poloze platí analogicky (obr. R4)

$$\frac{T}{\sin\alpha} = \frac{F_2}{\sin(90^\circ - \beta)} = \frac{F_1}{\sin(90^\circ - \alpha + \beta)}.$$

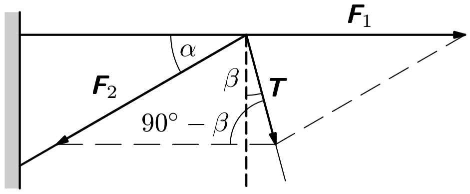
Pak můžeme psát

$$F_2 = \frac{T}{\sin\alpha}\sin(90^\circ - \beta) = \frac{F_G\cos^2\beta}{\sin\alpha} = \frac{(M+m)g\cos^2\beta}{\sin\alpha}.$$

Obdobně také určíme velikost síly F_1:

$$F_1 = \frac{F_G\cos\beta}{\sin\alpha}\sin(90^\circ - \alpha + \beta) = \frac{(M+m)g\cos\beta}{\sin\alpha}\cos(\alpha-\beta).$$

Pro dané hodnoty: $F_1 = 18{,}5$ N, $F_2 = 18{,}5$ N.

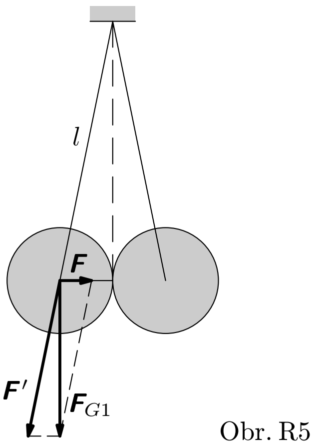


Obr. R4

Z řešení je zřejmé, že při přechodu z jedné krajní polohy do druhé stačí provést záměnu $\beta \to -\beta$ v příslušných vztazích.

6 bodů

2. a)



Obr. R5

Tíhová síla $\boldsymbol{F}_{G1}$ působící na váleček se rozkládá na vodorovnou složku $\boldsymbol{F}$, která váleček přitlačuje k druhému válečku, a na složku $\boldsymbol{F}'$, ve směru vlákna, která je stejná jako síla napínající vlákno. Z podobnosti trojúhelníků na obr. R5 plyne

$$\frac{F}{F_{G1}} = \frac{R}{\sqrt{l^2 - R^2}},$$

z čehož

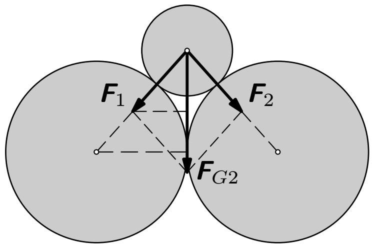
$$F = \frac{R}{\sqrt{l^2 - R^2}} Mg = \frac{1}{\sqrt{24}} Mg.$$

2 body

b) Tíhová síla $\boldsymbol{F}_{G2}$ působící na třetí váleček se podle obr. R6 rozkládá na dvě složky $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, které vyvolávají tlak na spodní válečky. Platí

$$\frac{F_{G2}}{2F_1} = \frac{\sqrt{(R+r)^2 - R^2}}{R+r} = \frac{\sqrt{9r^2 - 4r^2}}{3r} = \frac{\sqrt{5}}{3},$$

$$F_1 = \frac{3}{2\sqrt{5}} F_{G2} = \frac{3}{2\sqrt{5}} mg\,.$$



Obr. R6

2 body

c) V mezním případě výslednice síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_{G_1}$ má směr vlákna (obr. R7). Z podobnosti trojúhelníků plyne

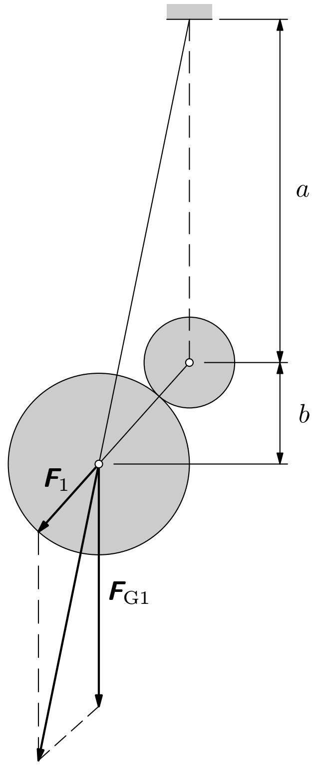
$$\frac{F_1}{F_{G1}} = \frac{R+r}{a}\,,$$

kde $a = \sqrt{l^2 - R^2} - b = \sqrt{100r^2 - 4r^2} - \sqrt{9r^2 - 4r^2} = r(4\sqrt{6} - \sqrt{5})$.
Z toho

$$F_1 = \frac{3}{2\sqrt{5}} mg = \frac{R+r}{a} F_{G1} = \frac{3}{4\sqrt{6} - \sqrt{5}} Mg\,,$$

$$m = \frac{2\sqrt{5}}{4\sqrt{6} - \sqrt{5}} M = 0{,}59M\,.$$

Z výše uvedeného vztahu vyplývá $\dfrac{m}{M} = 0{,}59$, což je největší hodnota poměru m/M, aby malý váleček nepropadl dolů. **4 body**



Obr. R7

d) Nyní nám zbývá ještě určit hodnotu poměru m/M, jsou-li všechny válečky stejně dlouhé a jsou-li vyrobeny ze stejného materiálu. Dostaneme

$$\frac{m}{M} = \frac{\pi r^2 h\varrho}{\pi R^2 h\varrho} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 = 0{,}25 < 0{,}59.$$

Vyrobíme-li tedy všechny válečky ze stejného materiálu, malý váleček nepropadne. **2 body**

3. a) Platí $m\dfrac{v^2}{r} = \varkappa\dfrac{mM}{r^2}$,

z čehož $v = \sqrt{\dfrac{\varkappa M}{r}} = \sqrt{\dfrac{\varkappa M}{R_\mathrm{z}+h}} = 7530\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Potom $T = \dfrac{2\pi(R_\mathrm{z}+h)}{v} = 2\pi\sqrt{\dfrac{(R_\mathrm{z}+h)^3}{\varkappa M}} = 5880\ \mathrm{s} = 1{,}63\ \mathrm{hod}$.

4 body

b) Užitečná práce je dána součtem změny potenciální energie gravitační E_pg a energie kinetické E_k, tj.

$$W = -\varkappa mM\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_\mathrm{z}}\right)+\frac{1}{2}mv^2 =$$

$$-\varkappa mM\left(\frac{1}{R_\mathrm{z}+h}-\frac{1}{R_\mathrm{z}}\right)+\frac{1}{2}mv^2 = \frac{\varkappa Mmh}{R_\mathrm{z}(R_\mathrm{z}+h)} = 6{,}7\cdot 10^{10}\ \mathrm{J}.$$

4 body

c) Označíme-li d délku objektu na Zemi a α zorný úhel, můžeme psát $d = \alpha h$, z čehož $\alpha = \dfrac{d}{h}$. Pro ČB zobrazení $\alpha_1 = \dfrac{0{,}41}{680\cdot 10^3}\cdot\dfrac{180}{\pi} = (3{,}5\cdot 10^{-5})^\circ =$ $= 0{,}12''$, pro barevné zobrazení $\alpha_2 = \dfrac{1{,}65}{680\cdot 10^3}\cdot\dfrac{180}{\pi} = (1{,}4\cdot 10^{-4})^\circ = 0{,}50''$.

2 body

4. a) Z rovnosti

$$I_1 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{2\omega C}\right)^2}}$$

plyne

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 = \left(\omega L - \frac{1}{2\omega C}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \omega L - \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\omega C} - \omega L\,,$$

$$2\omega L = \frac{3}{2\omega C}\,, \qquad L = \frac{3}{4\omega^2 C} = \frac{3}{16\pi^2 f^2 C} = 1{,}9\ \mathrm{H}\,.$$

3 body

b) Z podmínky rezonance $\omega L - \dfrac{1}{\omega(C + C')} = 0$ dostaneme

$$C + C' = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{4}{3}C\,, \qquad C' = \frac{C}{3} = 1{,}33\ \mu\mathrm{F}\,.$$

2 body

c) Porovnáním vztahů $I_\mathrm{r} = \dfrac{U_0}{R}$,

$$I_1 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\dfrac{3}{4\omega C} - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \dfrac{1}{16\omega^2 C^2}}}$$

dostaneme

$$U_0^2 = R^2 I_\mathrm{r}^2 = \left(R^2 + \frac{1}{16\omega^2 C^2}\right) I_1^2\,,$$

$$R^2(I_\mathrm{r}^2 - I_1^2) = \frac{I_1^2}{16\omega^2 C^2}\,, \quad R = \frac{I_1}{4\omega C\sqrt{I_\mathrm{r}^2 - I_1^2}} = \frac{I_1}{8\pi f C\sqrt{I_\mathrm{r}^2 - I_1^2}} = 161\ \Omega\,.$$

Pak

$$U_0 = RI_\mathrm{r} = \frac{I_1 I_\mathrm{r}}{8\pi f C\sqrt{I_\mathrm{r}^2 - I_1^2}} = 1{,}61\ \mathrm{V},$$

$$U_C = \frac{I_\mathrm{r}}{\omega(C + C')} = \frac{3I_\mathrm{r}}{4\omega C} = \frac{3I_\mathrm{r}}{8\pi f C} = 6{,}0\ \mathrm{V}.$$

5 bodů