Řešení úloh krajského kola 50. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie A

Autoři úloh: I. Volf (1), J. Jírů (2) a P. Šedivý (3, 4)

1. a) Protože gravitační síla je silou dostředivou

$$\frac{\varkappa Mm}{r^2} = m\frac{4\pi^2}{T^2}r\,,$$

platí

$$r = \sqrt[3]{\frac{\varkappa MT^2}{4\pi^2}} = 8\,070\ \mathrm{km}\,.$$

Nad severním pólem stanice prolétá ve výšce 8 070 km−6 357 km = 1 713 km.

3 body

b) V soustavě spojené se zemskou osou a orientované ke hvězdám se stanice pohybuje rychlostí

$$v = \frac{2\pi r}{T} = 7{,}04\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}\,.$$

1 bod

c) Stanice proletí nad rovníkem poprvé v čase $t_1 = \dfrac{T}{4} = 1\,800$ s. Země se mezitím otočí o úhel

$$\varphi_1 = \frac{t_1}{T_0}\cdot 360° = 7{,}52°\,,$$

kde $T_0 = 23$ h 56 min 4 s $= 86\,164$ s. V tomto okamžiku se tedy bude stanice nacházet na $7°31'$ západní délky.

Podruhé proletí stanice nad rovníkem v čase $t_2 = \dfrac{3T}{4} = 5\,400$ s. Tomu odpovídá úhel otočení

$$\varphi_2 = \frac{t_2}{T_0}\cdot 360° = 22{,}56°\,,$$

V tomto okamžiku se tedy bude stanice nacházet na $157°26'$ východní délky.

2 body

d) Kosmonaut může v určitém okamžiku pozorovat vrchlík, jehož výšku určíme podle obr. R1. Platí

$$\cos\alpha = \frac{R}{r} = \frac{R-h}{R} \qquad\Rightarrow\qquad h = R\left(1-\frac{R}{r}\right)\,.$$

Obsah vrchlíku a povrch Země jsou v poměru

$$\frac{2\pi Rh}{4\pi R^2} = \frac{h}{2R} = \frac{1-\dfrac{R}{r}}{2} = 0{,}105\,.$$

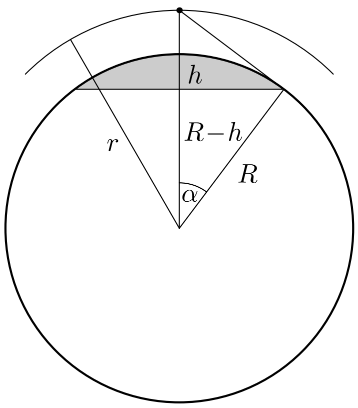
V určitém okamžiku můžeme tedy ze stanice přehlédnout 10,5 % zemského povrchu.

2 body

Největší vzdálenost s dvou bodů, které můžeme současně pozorovat, je rovna délce oblouku o poloměru R a středovém úhlu $2\alpha = 2 \cdot 37{,}876° = 1{,}32$ rad:

$$s = R \cdot 2\alpha = 8\,420\ \text{km}\,.$$

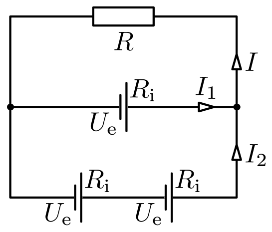
2 body



Obr. R1

2. a) Při volbě směrů proudů podle obrázku sestavíme rovnice na základě Kirchhoffových zákonů:

$$U_\mathrm{e} = R_\mathrm{i} I_1 + RI\,,$$
$$2U_\mathrm{e} = 2R_\mathrm{i} I_2 + RI\,,$$
$$I_1 + I_2 = I\,.$$



Obr. R2

Z rovnic plyne

$$I = \frac{4U_\mathrm{e}}{2R_\mathrm{i} + 3R}\,.$$

Napětí na rezistoru o odporu R pak je

$$U = RI = \frac{4RU_\mathrm{e}}{2R_\mathrm{i} + 3R}\,.$$

2 body

b) Z rovnic dále plyne

$$I_1 = \frac{2R_\mathrm{i} - R}{R_\mathrm{i}(2R_\mathrm{i} + 3R)} U_\mathrm{e}\,, \tag{1}$$

$$I_2 = \frac{2R_\mathrm{i} + R}{R_\mathrm{i}(2R_\mathrm{i} + 3R)} U_\mathrm{e}\,. \tag{2}$$

Podmínka je splněna pro kladné hodnoty proudů. Tedy $I_1 > 0$, pro $R < 2R_\mathrm{i}$, $I_2 > 0$ platí pro libovolný odpor R. Kladný proud I_2 lze zdůvodnit i tím, že v této větvi je největší elektromotorické napětí.

2 body

c) Příkon rezistoru je

$$P = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R} = \frac{16R}{(2R_\mathrm{i} + 3R)^2} U_\mathrm{e}^2\,. \tag{3}$$

Provedeme derivaci příkonu P podle odporu R:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}R} = 16U_\mathrm{e}^2 \frac{2R_\mathrm{i} - 3R}{(2R_\mathrm{i} + 3R)^3}\,.$$

Z podmínky $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}R} = 0$ plyne, že hledaný odpor je $R' = \dfrac{2}{3}R_\mathrm{i}$. (Je roven vnitřnímu odporu zdroje jako celku.) Provedeme druhou derivaci:

$$\frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}R^2} = 16U_\mathrm{e}^2 \frac{-24R_\mathrm{i} + 18R}{(2R_\mathrm{i} + 3R)^4}\,.$$

Pro $R = R' = 2/3R_\mathrm{i}$ je

$$\frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}R^2} = 16U_\mathrm{e}^2 \frac{-12R_\mathrm{i}}{(4R_\mathrm{i})^4} < 0\,,$$

tedy jedná se o maximum.

(Místo druhé derivace lze uvážit, že vzorec (3) představuje podíl přímé úměrnosti a kvadratické funkce, kde vzhledem ke kladným hodnotám odporů je jmenovatel nenulový a tudíž funkce je spojitá na intervalu od nuly do nekonečna. Funkční hodnota v nule je nulová stejně jako limita v nekonečnu a funkce na uvedeném intervalu nabývá nezáporných hodnot. Proto jediný nalezený extrém pomocí první derivace musí být maximem.)

Dosazením do rovnice (3) za proměnnou R dostaneme $P_{\max} = \dfrac{2U_\mathrm{e}^2}{3R_\mathrm{i}}$.

3 body

d) Celkový elektrický příkon zapojení je $P_0 = U_\mathrm{e}I_1 + 2U_\mathrm{e}I_2$. Dosazením z rovnic (1) a (2) dostaneme

$$P_0 = \frac{6R_\mathrm{i} + R}{R_\mathrm{i}(2R_\mathrm{i} + 3R)} U_\mathrm{e}^2 \,.$$

Účinnost zapojení je

$$\eta = \frac{P}{P_0} = \frac{16R_\mathrm{i}R}{(2R_\mathrm{i} + 3R)(6R_\mathrm{i} + R)} = \frac{16R_\mathrm{i}R}{3R^2 + 20R_\mathrm{i}R + 12R_\mathrm{i}^2} \,. \qquad (4)$$

Provedeme derivaci účinnosti η podle odporu R:

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}R} = 48R_\mathrm{i}\frac{4R_\mathrm{i}^2 - R^2}{(3R^2 + 20R_\mathrm{i}R + 12R_\mathrm{i}^2)^2} \,.$$

Z podmínky $\dfrac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}R} = 0$ plyne, že hledaný odpor je $R'' = 2R_\mathrm{i}$. (mimochodem též $I_1 = 0$). Provedeme druhou derivaci:

$$\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\mathrm{d}R^2} =$$

$$= 48R_\mathrm{i}\frac{-2R(3R^2 + 20R_\mathrm{i}R + 12R_\mathrm{i}^2)^2 - 2(4R_\mathrm{i}^2 - R^2)(3R^2 + 20R_\mathrm{i}R + 12R_\mathrm{i}^2)(6R + 20R_\mathrm{i})}{(3R^2 + 20R_\mathrm{i}R + 12R_\mathrm{i}^2)^4} =$$

$$= 48R_\mathrm{i}\frac{6R^3 - 72R_\mathrm{i}^2R - 160R_\mathrm{i}^3}{(3R^2 + 20R_\mathrm{i}R + 12R_\mathrm{i}^2)^3} \,.$$

Pro $R = R'' = 2R_\mathrm{i}$ je

$$\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\mathrm{d}R^2} = 48R_\mathrm{i}\frac{-256R_\mathrm{i}^3}{(64R_\mathrm{i}^2)^3} < 0 \,,$$

jedná se tedy o maximum.

(Místo druhé derivace lze uvážit, že vzorec (4) představuje stejně jako vzorec (3) podíl přímé úměrnosti a kvadratické funkce. Další zdůvodnění je pak stejné jako v úloze c).) Dosazením do rovnice (4) za proměnnou R dostaneme

$$\eta = \frac{1}{2} \,.$$

3 body

3. a) Nejprve určíme poloměr R kulové plochy čočky. Z Eukleidovy věty o výšce plyne

$$\varrho^2 = (2R - d)d \qquad \Rightarrow \qquad R = \frac{\varrho^2 + d^2}{2d} = 170\ \text{mm}\,.$$

Paprsek přicházející ve vzdálenosti $m \ll R$ od optické osy protíná optickou osu po průchodu čočkou ve vzdálenosti f od čočky (obr. R3). Podle zákona lomu

$$n = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha} \approx \frac{\alpha + \beta}{\alpha} \approx \frac{\dfrac{m}{R} + \dfrac{m}{f}}{\dfrac{m}{R}} = \frac{\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{f}}{\dfrac{1}{R}}\,.$$

Z toho

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{f} = n\frac{1}{R}\,, \qquad f = \frac{R}{n-1} = 327\ \text{mm}\,.$$

V bodě F ve vzdálenosti f od čočky se na optické ose protnou všechny paprsky dopadající na čočku v malé vzdálenosti od optické osy. Sem tedy umístíme stínítko.

6 bodů

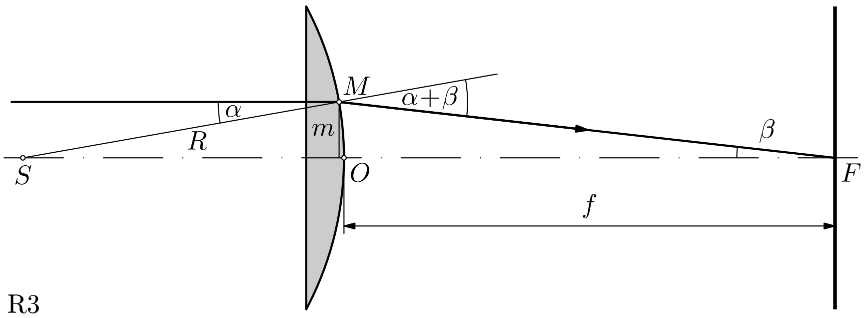
b) Po odstranění clony krajní paprsky protínají stínítko ve vzdálenosti ϱ_1 od bodu F (obr. R4). Platí

$$\gamma = \arcsin\frac{\varrho}{R}\,, \qquad \gamma = 28,1^\circ\,,$$

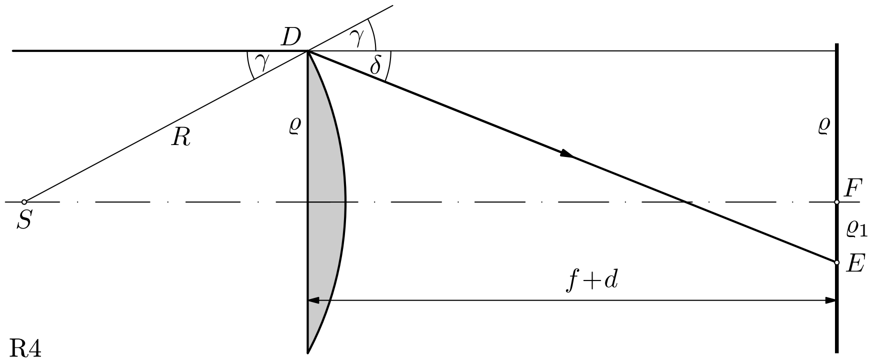
$$\sin(\gamma + \delta) = n\sin\gamma = \frac{n\varrho}{R} \qquad \delta = \arcsin\frac{n\varrho}{R} - \gamma = 17{,}6^\circ\,.$$

$$\varrho_1 = (d + f)\,\mathrm{tg}\,\delta - \varrho = 30{,}0\ \text{mm}\,.$$

4 body



Obr. R3



Obr. R4

4. Účinnost η kruhového děje je definována jako poměr celkové práce W' plynu během jednoho cyklu a celkového tepla Q přijatého plynem během jednoho cyklu od ohřívače.

$$\eta = \frac{W'}{Q}\,.$$

Práce W' je určena obsahem obrazce omezeného grafem. V obou případech má stejnou velikost $W' = 2p_1V_1$. Poměr účinností obou cyklů je tedy

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{Q_2}{Q_1}\,,$$

2 body

kde Q_1 je celkové teplo přijaté plynem v jednom cyklu prvního děje a Q_2 v jednom cyklu druhého děje. Celkové teplo přijaté během prvního cyklu je součtem tepla přijatého při izochorickém ohřátí $1 \rightarrow 2$ a tepla přijatého při izobarické expanzi $2 \rightarrow 3$. U druhého cyklu je součtem tepla přijatého při izochorickém ohřátí $1 \rightarrow 5$ a tepla přijatého při izobarické expanzi (resp. $5 \rightarrow 6$).

Označme T_1 teplotu plynu ve stavu 1, tedy při tlaku p_1 a objemu V_1. Ze stavové rovnice plyne

$$T_2 = T_7 = 2T_1\,, \quad T_5 = T_4 = 3T_1\,, \quad T_6 = T_3 = 6T_1\,.$$

2 body

Teplo přijaté plynem při izochorickém ohřátí je rovno přírůstku vnitřní energie. Teplo přijaté při izobarické expanzi je rovno součtu přírůstku vnitřní energie a vykonané práce. Proto

$$Q_1 = Q_{12} + Q_{23} = \tfrac{5}{2}nR(T_2 - T_1) + \tfrac{5}{2}nR(T_3 - T_2) + 2p_1 \cdot 2V_1 = \\ = \tfrac{5}{2}nRT_1 + 10nRT_1 + 4nRT_1 = \tfrac{33}{2}nRT_1\,.$$

$$Q_2 = Q_{15} + Q_{56} = \tfrac{5}{2}nR(T_5 - T_1) + \tfrac{5}{2}nR(T_6 - T_5) + 3p_1 \cdot V_1 = \\ = 5nRT_1 + \tfrac{15}{2}nRT_1 + 3nRT_1 = \tfrac{31}{2}nRT_1\,.$$

5 bodů

Poměr účinností obou kruhových dějů je

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{31}{33}\,.$$

1 bod