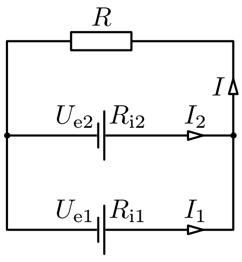
Řešení úloh 1. kola 49. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie A*

Autoři úloh: J. Jírů (1), P. Šedivý (2, 3, 4, 5, 7), B. Vybíral (6)

1. a) Při volbě směrů proudů podle obrázku sestavíme podle Kirchhoffových zákonů rovnice:

$$U_{e1} = R_{i1} I_1 + RI\,, \qquad (1)$$
$$U_{e2} = R_{i2} I_2 + RI\,, \qquad (2)$$
$$I_1 + I_2 = I\,, \qquad (3)$$

Z rovnic plyne $\quad I = \dfrac{U_{e1}R_{i2} + U_{e2}R_{i1}}{R_{i1}R_{i2} + R_{i1}R + R_{i2}R}\,. \quad (4)$



Obr. R1

Napětí na rezistoru je

$$U = RI = \frac{R(U_{e1}R_{i2} + U_{e2}R_{i1})}{R_{i1}R_{i2} + R_{i1}R + R_{i2}R}\,.$$

Číselně pro $R = R_0$ vychází $U = 1{,}29$ V. **3 body**

b) Předpokládejme, že platí $U_{e1} < U_{e2}$. Pak proud může téci v opačném směru vzhledem k polaritě zdroje pouze zdrojem o elektromotorickém napětí U_{e1}. Proud tekoucí tímto zdrojem tak splňuje podmínku $I_1 < 0$. Z rovnice (1) vyjádříme proud I_1 a do získaného vztahu dosadíme z rovnice (4) proud I. Po úpravě dostaneme

$$I_1 = \frac{U_{e1}}{R_{i1}} - \frac{R}{R_{i1}} \cdot \frac{U_{e1}R_{i2} + U_{e2}R_{i1}}{R_{i1}R_{i2} + R_{i1}R + R_{i2}R}\,.$$

Z podmínky $I_1 < 0$ v této rovnici plyne $R > \dfrac{U_{e1}}{U_{e2} - U_{e1}} R_{i2}\,.$

Číselně vychází $R > \dfrac{8}{3}\Omega.$ **3 body**

c) Příkon rezistoru je

$$P = RI^2 = \frac{R(U_{e1}R_{i2} + U_{e2}R_{i1})^2}{(R_{i1}R_{i2} + R_{i1}R + R_{i2}R)^2}\,. \qquad (5)$$

Provedeme derivaci příkonu P podle odporu R:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}R} = (U_{e1}R_{i2} + U_{e2}R_{i1})^2 \frac{(R_{i1}R_{i2} + R_{i1}R + R_{i2}R)^2 - R \cdot 2(R_{i1}R_{i2} + R_{i1}R + R_{i2}R)(R_{i1} + R_{i2})}{(R_{i1}R_{i2} + R_{i1}R + R_{i2}R)^4} =$$

$$= (U_{e1}R_{i2} + U_{e2}R_{i1})^2 \frac{(R_{i1}R_{i2})^2 - R^2(R_{i1} + R_{i2})^2}{(R_{i1}R_{i2} + R_{i1}R + R_{i2}R)^4} =$$

$$= (U_{e1}R_{i2} + U_{e2}R_{i1})^2 \frac{R_{i1}R_{i2} - R(R_{i1} + R_{i2})}{(R_{i1}R_{i2} + R_{i1}R + R_{i2}R)^3}\,.$$

Z podmínky $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}R} = 0$ plyne, že hledaný odpor je

$$R' = \frac{R_{\rm i1}R_{\rm i2}}{R_{\rm i1}+R_{\rm i2}}\,. \tag{6}$$

Pro $R < R'$ je $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}R} > 0$, pro $R > R'$ je $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}R} < 0$. Pro $R = R'$ dosahuje tedy funkce (5) maxima. Maximální příkon dostaneme dosazením odporu z rovnice (6) do rovnice (5):

$$P_{\max} = \frac{(U_{\rm e1}R_{\rm i2}+U_{\rm e2}R_{\rm i1})^2}{4R_{\rm i1}R_{\rm i2}(R_{\rm i1}+R_{\rm i2})}\,.$$

Číselně je $R' = 0{,}40\ \Omega$, $P_{\max} = 1{,}19$ W. **4 body**

2. Během nabíjení kondenzátoru projde obvodem náboj $Q = CU_{\rm e}$ a celková práce vykonaná zdrojem je $W_{\rm z} = U_{\rm e}Q = CU_{\rm e}^2$, zatímco kondenzátor získá energii $E = \dfrac{1}{2}CU_{\rm e}^2$, což je jedna polovina. Druhá polovina energie se spotřebuje ve vnitřním odporu zdroje a ve spotřebiči. Rozdělí se v poměru jejich odporů. Spotřebič během nabíjení kondenzátoru přijme energii

$$E_1 = \frac{1}{2}CU_{\rm e}^2\frac{R}{R+r}\,.$$

Během vybíjení kondenzátoru se energie, kterou získal při nabíjení, zcela spotřebuje ve spotřebiči. Během celého cyklu, tedy za dobu $2t_1$, získá spotřebič energii

$$E + E_1 = \frac{1}{2}CU_{\rm e}^2\left(1+\frac{R}{R+r}\right) = \frac{2R+r}{2(R+r)}CU_{\rm e}^2\,.$$

Účinnost obvodu je

$$\eta = \frac{E+E_1}{W_{\rm z}} = \frac{2R+r}{2(R+r)}\,.$$

Průměrný výkon spotřebiče je

$$P = \frac{E+E_1}{2t_1} = \frac{2R+r}{4t_1(R+r)}CU_{\rm e}^2\,.$$

Pro dané hodnoty $\eta = \dfrac{6}{11} \approx 0{,}55 = 55\ \%$, $P = 5{,}5$ W. **6 bodů**

Pokud bychom připojili spotřebič přímo ke zdroji, procházel by obvodem proud $I = U_{\rm e}/(R+r)$ a výkon spotřebiče by byl

$$P' = RI^2 = \frac{RU_{\rm e}^2}{(R+r)^2}\,.$$

Účinnost obvodu by byla $\eta' = \dfrac{R}{R+r}$.

Pro dané hodnoty $P' = 8{,}3$ W, $\eta' = \dfrac{1}{11} \approx 9{,}1$ %.

Výkon spotřebiče v obvodu s přepínačem a kondenzátorem je poněkud menší, ale účinnost je šestkrát větší.

4 body

Poznámka: Přesným výpočtem bychom zjistili, že za dobu t_1 se kondenzátor nabije na napětí $U_1 = U_\mathrm{e}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t_1}{(R+r)C}}\right) \approx 0{,}99 U_\mathrm{e}$ a po přepnutí přepínače se za stejnou dobu vybije na napětí $U_2 = U_1 \mathrm{e}^{-\frac{t_1}{RC}} \approx 0$. Zjednodušující předpoklady v zadání úlohy jsou tedy oprávněné.

3. a) Zvolme vztažnou soustavu a označení veličin podle obr. R2. Čas měříme od průchodu počátkem. Z kinematických zákonů šikmého vrhu

$$x = v_1 t \cos\alpha_1\,, \qquad y = v_1 t \sin\alpha_1 - \frac{1}{2} g t^2$$

odvodíme rovnici trajektorie $y = x\dfrac{\sin\alpha_1}{\cos\alpha_1} - \dfrac{g x^2}{2 v_1^2 \cos^2\alpha_1}$.

Protože trajektorie prochází bodem $[l, 0]$, platí

$$0 = l\frac{\sin\alpha_1}{\cos\alpha_1} - \frac{g l^2}{2 v_1^2 \cos^2\alpha_1}\,, \quad \Rightarrow \quad v_1^2 = \frac{lg}{2\sin\alpha_1\cos\alpha_1} = \frac{lg}{\sin 2\alpha_1}\,. \tag{1}$$

Ze zákona zachování energie plyne

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 + mg(h - h_0) \quad \Rightarrow \quad v_0^2 = v_1^2 + 2g(h - h_0)\,. \tag{2}$$

Má-li být tedy rychlost $\boldsymbol{v}_0$ co nejmenší, musí to platit i o rychlosti $\boldsymbol{v}_1$. Toho podle (1) dosáhneme když $\alpha_1 = 45°$, $\sin 2\alpha_1 = 1$, $v_1^2 = gl$.

Rovnice trajektorie pak má tvar

$$y = x - \frac{x^2}{l}\,. \tag{3}$$

Počáteční bod trajektorie musí splňovat podmínku $y = y_0 = -(h - h_0)$. Dosazením do (3) dostaneme kvadratickou rovnici

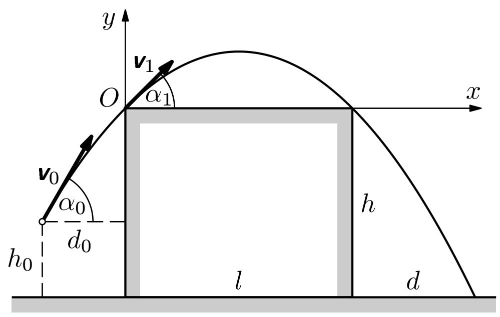
$$\frac{x^2}{l} - x - (h - h_0) = 0\,. \tag{4}$$

Úloze vyhovuje záporný kořen

$$x_0 = \frac{l - \sqrt{l^2 + 4(h - h_0)l}}{2}\,.$$

Pro dané hodnoty $d_0 = -x_0 = 2{,}2$ m.

4 body



Obr. R2

b) Z (1) a (2) plyne $v_0 = \sqrt{gl + 2g(h - h_0)}\,.$
Pro dané hodnoty $v_0 = 10{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.
Po celou dobu pohybu má vodorovná souřadnice rychlosti kamene konstantní velikost $v_x = v_1 \cos 45° = \dfrac{\sqrt{gl}}{\sqrt{2}}$. Pro elevační úhel vrhu platí

$$\cos\alpha_0 = \frac{v_x}{v_0} = \sqrt{\frac{l}{2[l + 2(h - h_0)]}}\,.$$

Pro dané hodnoty $\cos\alpha_0 = 0{,}5\,, \quad \alpha_0 = 60°.$ **2 body**

c) Bod dopadu je určen podmínkou $y = -h$. Dosazením do (3) dostaneme kvadratickou rovnici

$$\frac{x^2}{l} - x - h = 0\,.$$

Úloze vyhovuje kladný kořen

$$x_\mathrm{d} = \frac{l + \sqrt{l^2 + 4hl}}{2}\,.$$

Pro dané hodnoty $x_\mathrm{d} = 9{,}2$ m, $\quad d = 3{,}2$ m. **2 body**

d) Dobu letu kamene určíme ze vztahu

$$t = \frac{x_\mathrm{d} - x_0}{v_x} = \frac{\dfrac{l + \sqrt{l^2 + 4hl} - (l - \sqrt{l^2 + 4(h - h_0)l}}{2}}{\sqrt{\dfrac{gl}{2}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{l + 4h} + \sqrt{l + 4(h - h_0)}}{\sqrt{2g}}\,.$$

Pro dané hodnoty $t = 2{,}1$ s. **2 body**

4. Tlak sloupce vzduchu je roven součtu atmosférického tlaku $p_{\mathrm{at}} = h\varrho g$ a hydrostatického tlaku sloupce rtuti v trubici

$$p = p_{\mathrm{at}} + (L - l)\varrho g = (h + L - l)\varrho g\,,$$

kde ϱ je hustota rtuti. Objem uzavřeného vzduchu je $V = Sl$, kde S je obsah průřezu trubice. Počáteční hodnoty stavových veličin jsou

$$T_1, \quad p_1 = (h + \frac{L}{2})\varrho g, \quad V_1 = S \cdot \frac{L}{2}.$$

Protože teplota trubice se mění pomalu, můžeme předpokládat, že zahřívání vzduchu probíhá jako rovnovážný děj a použít stavovou rovnici ideálního plynu:

$$\frac{(h + L - l)\varrho g S l}{T} = \frac{\left(h + \frac{L}{2}\right)\varrho g S L}{2T_1}\,.$$

3 body

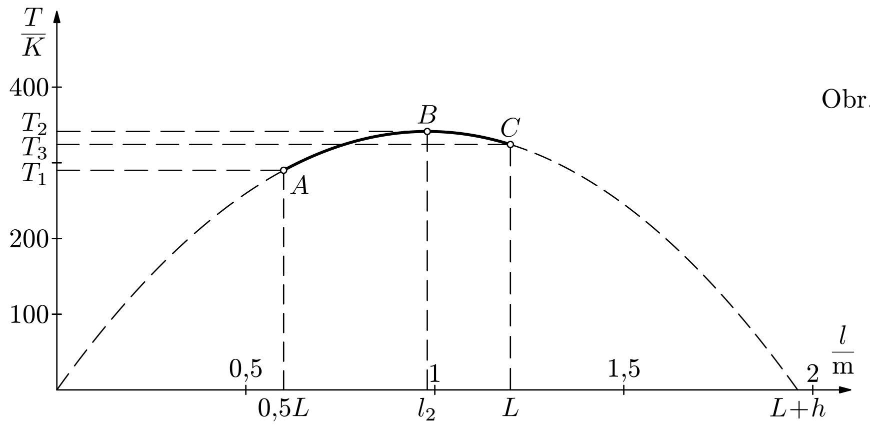
Úpravou dostaneme

$$T = \frac{2T_1}{\left(h + \frac{L}{2}\right)L}\left[(h + L)l - l^2\right]\,. \tag{1}$$

Vztah mezi absolutní termodynamickou teplotou vzduchu v trubici a délkou vzduchového sloupce je popsán kvadratickou funkcí. Jejím grafem (obr. R3) je parabola, která protíná osu l v počátku a v bodě $l = L + h$. Vrchol B paraboly má souřadnice

$$l_2 = \frac{L + h}{2}\,, \qquad T_2 = T_1\frac{(h + L)^2}{(2h + L)L}\,.$$

3 body



Obr. R3

Pro dosazení číselných hodnot dostaneme

$$l_2 = 0{,}98\ \mathrm{m},\ T_2 = 341\ \mathrm{K},\ t_2 = 68\ ^\circ\mathrm{C}\,.$$

Pro sestrojení grafu použijeme rovnici $\{T\} = 355(1{,}96\{l\} - \{l\}^2)\,.$

Z grafu vyčteme, že při zahřívání trubice se teplota plynu zvětšuje až do hodnoty T_2 a výška vzduchového sloupce přitom roste, až dosáhne hodnoty l_2. Závislost l na T v tomto intervalu popisuje vztah, který dostaneme řešením rovnice (1):

$$l = \frac{L + h - \sqrt{(L+h)^2 - \dfrac{(L+2h)LT}{T_1}}}{2}\,.$$

Z termodynamického hlediska se v této části děje teplo přijaté vzduchem v trubici spotřebuje na zvýšení vnitřní energie vzduchu a na práci potřebnou k vypuzení části rtuti z trubice.

Po dosažení teploty T_2 už vnitřní energie vzduchového sloupce dál neroste. Vypuzování rtuti se zrychlí a probíhá i na úkor vnitřní energie vzduchu v trubici. I v této části děje můžeme považovat rozpínání za kvaziorovnovážné. Teplota vzduchu se snižuje podle vztahu (1) a v okamžiku, kdy všechna rtuť opustí trubici, má hodnotu

$$T_3 = \frac{2h}{h + \dfrac{L}{2}} T_1 = 324\ \mathrm{K}, \quad t_3 = 51\ ^\circ\mathrm{C}.$$

V této části děje závisí délka vzduchového sloupce na klesající teplotě podle vztahu

$$l = \frac{L + h + \sqrt{(L+h)^2 - \dfrac{(L+2h)LT}{T_1}}}{2}\,.$$

4 body

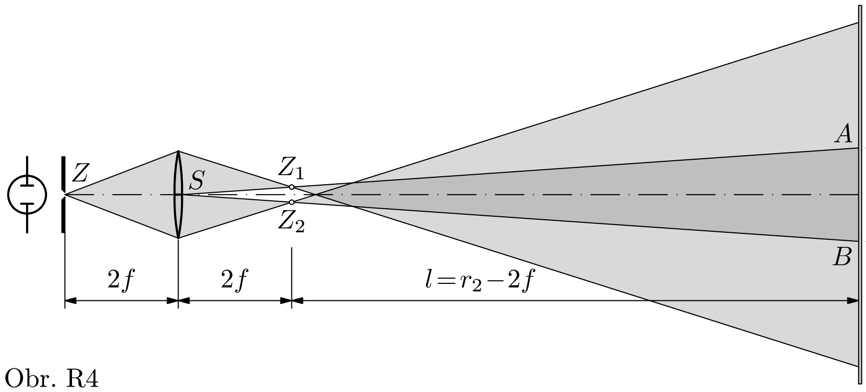
5. Dvojčočka rozdělí světelné vlnění vystupující ze štěrbiny Z na dvě koherentní světelná vlnění, která se soustřeďují do obrazů Z_1, Z_2 štěrbiny (obr. R4). Ty se chovají jako dva koherentní světelné zdroje, ze kterých je osvětleno stínítko. V místech na stínítku, kde se setkávají vlnění z obou zdrojů, se objevuje interferenční jev.

Polohu obrazů Z_1, Z_2 vytvořených dvojčočkou určíme užitím zákonů zobrazení tenkou spojkou (obr. R5):

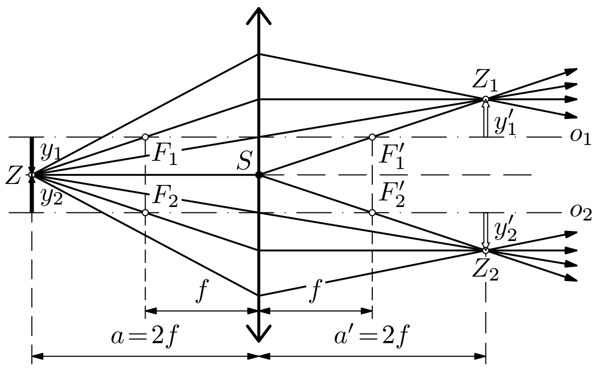
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad a' = \frac{af}{a-f}\,, \qquad \frac{y'}{y} = -\frac{a'}{a}\,.$$

Pro $a = 2f$, $y = -\dfrac{h}{2}$ dostáváme $a' = a = 2f$, $y' = -y = \dfrac{h}{2}$. Zdroje Z_1, Z_2 tedy leží ve vzdálenosti $2f$ od dvojčočky a ve vzdálenosti $l = r_2 - 2f$ od stínítka. Jejich vzájemná vzdálenost je $4 \cdot \dfrac{h}{2} = 2h$.

3 body



Obr. R4



Obr. R5

a) Polohu interferenčních maxim na stínítku určíme podle obr. R6. V maximu P je dráhový rozdíl $s_2 - s_1$ paprsků přicházejících ze zdrojů Z_1, Z_2 celistvým násobkem vlnové délky světla. Pro souřadnici y maxima platí

$$s_2 - s_1 = \sqrt{l^2 + (y+h)^2} - \sqrt{l^2 + (y-h)^2} =$$

$$= l\sqrt{1 + \left(\frac{y+h}{l}\right)^2} - l\sqrt{1 + \left(\frac{y-h}{l}\right)^2} = k\lambda, \quad k \ldots \text{celé číslo.}$$

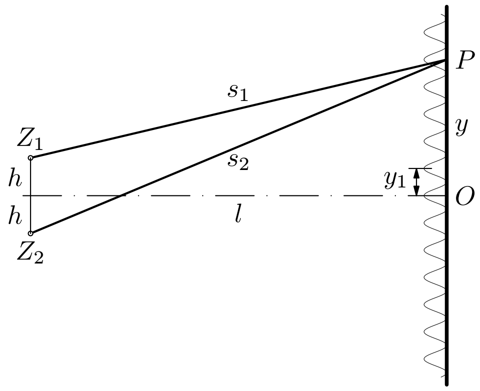
Protože ve skutečnosti $y \ll l,$ můžeme psát

$$s_2 - s_1 \approx l\left[1 + \frac{(y+h)^2}{2l^2}\right] - l\left[1 + \frac{(y-h)^2}{2l^2}\right] = \frac{2hy}{l} = k\lambda\,,$$

$$y = k \cdot \frac{l\lambda}{2h} = ky_1\,,$$

kde y_1 je vzdálenost středů sousedních maxim. Pro dané hodnoty vychází $y_1 = 0{,}66$ mm.

4 body



Obr. R6

b) Šířku H oblasti na stínítku, kde vzniknou interferenční proužky, určíme podle obr. R4. Z podobnosti trojúhelníků SZ_1Z_2 a SAB plyne

$$\frac{H}{2h} = \frac{r_2}{2f} \quad \Rightarrow \quad H = \frac{hr_2}{f}\,.$$

Pro dané hodnoty vychází $H = 40$ mm. **3 body**

6. a) Moment setrvačnosti tenké tyče o hmotnosti m_1 a délce L je $\frac{1}{12}m_1L^2$. Torzní oscilátor s tyčí zavěšenou na drátu délky l_1 o poloměru r kmitá s periodou

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{k_\mathrm{t}}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{12}m_1L^2}{\frac{\pi G r^4}{2l_1}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1L^2l_1}{6\pi G r^4}}\,.$$

Z toho $G = \dfrac{2\pi m_1 L^2 l_1}{3T_1^2 r^4}$,

$$s_{\overline{G}} = \overline{G}\sqrt{\left(\frac{s_{\overline{m}_1}}{m_1}\right)^2 + \left(\frac{2s_{\overline{L}}}{L}\right)^2 + \left(\frac{s_{\overline{l}_1}}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{2s_{\overline{T}_1}}{T_1}\right)^2 + \left(\frac{4s_{\overline{r}}}{r}\right)^2}$$

Výsledky měření a výpočtů:

	TYČ	DRÁT		KMITY
č.	L/mm	d/mm	l_1/mm	$5T_1$/s
1	633	1,04	769	37,5
2	633,5	1,06	768	38,0
3	634	1,05	769	37,8
4	633,5	1,04	770	37,2
5	633,5	1,06	770,5	37,5
6		1,05		37,6
7		1,05		37,6
8		1,05		37,4
9		1,04		37,6
10		1,04		37,5
$\overline{x}$	633,5	1,048	769,3	37,57
$s_{\overline{x}}$	0,5 *)	0,005 *)	0,5 *)	0,07

*) Respektovány meze přesnosti délkového měřidla ±0,5 dílku.

$L = (633{,}5 \pm 0{,}5)$ mm,
$r = (0{,}524 \pm 0{,}003)$ mm,
$l_1 = (769{,}3 \pm 0{,}5)$ mm,
$T_1 = (7{,}51 \pm 0{,}02)$ s,
$m_1 = 386{,}6$ g, $s_{\overline{m}_1} \to 0$.

$\boxed{G = 5{,}9 \pm 0{,}2 \cdot 10^{10}\ \mathrm{Pa}\,.}$

b) Torzní oscilátor tvořený činkou o momentu setrvačnosti J zavěšenou na drátě o délce l_2 a poloměru r kmitá s periodou

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{k_\mathrm{t}}}.$$

S užitím výsledku úlohy a) dostaneme

$$J = \frac{Gr^4T_2^2}{8\pi l_2} = \frac{2\pi l_1 m_1 L^2}{3T_1^2 r^4}\cdot\frac{r^4T_2^2}{8\pi l_2} = \frac{m_1L^2}{12}\cdot\frac{l_1}{l_2}\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2\,,$$

$$s_{\overline{J}} = \overline{J}\sqrt{\left(\frac{s_{\overline{m}_1}}{m_1}\right)^2 + \left(\frac{2s_{\overline{L}}}{L}\right)^2 + \left(\frac{s_{\overline{l}_1}}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{s_{\overline{l}_2}}{l_2}\right)^2 + \left(\frac{2s_{\overline{T}_1}}{T_1}\right)^2 + \left(\frac{2s_{\overline{T}_2}}{T_2}\right)^2}\,.$$

Výsledky měření a výpočtů:

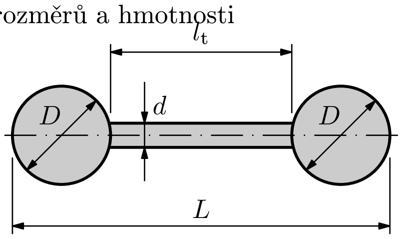
	DRÁT	KMITY
č.	l_2/mm	$5T_2$/s
1	760	43.4
2	761	42.9
3	762	43.1
4	762	43.0
5	761	43.2
6		43.0
7		42.8
8		43.2
9		42.4
10		42.8
$\overline{x}$	761,2	42,98
$s_{\overline{x}}$	0,5 *)	0,09

$l_2 = (761{,}2 \pm 0{,}5))$; mm,
$T_2 = (8{,}60 \pm 0{,}02)$ s.

$$\boxed{J = (1{,}71 \pm 0{,}02) \cdot 10^{-2}\ \mathrm{kg \cdot m^2}\,.}$$

c) Výpočet momentu setrvačnosti činky z rozměrů a hmotnosti

Výsledky měření:
$D = 65{,}6$ mm,
$d = 16{,}0$ mm,
$L = 243{,}0$ mm,
$m = 2{,}115$ kg .. hmotnost celé činky.



Obr. R7

Výpočty:
$l_t = L - 2D = 111{,}8$ mm,

$$m_t = m\frac{\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 l_t}{\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 l_t + 2\cdot\frac{4}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3} = 0{,}1495\ \text{kg .. hmotnost tyčky,}$$

$$m_k = \frac{m - m_t}{2} = 0{,}9823\ \text{kg .. hmotnost koule,}$$

$$J' = m_t\left(\frac{l_t^2}{12} + \frac{d^2}{16}\right) + 2\left[\frac{2}{5}m_k\left(\frac{D}{2}\right)^2 + m_k\left(\frac{L-D}{2}\right)^2\right] = 0{,}0165\ \mathrm{kg\cdot m^2}.$$

Odchylka výsledků: $\delta = \dfrac{J - J'}{J} \cdot 100\ \% = 3{,}5\ \%$.

Rozdíl je přijatelný; na odlitku nejsou přesně vymodelovány koule, rozdíl může způsobit i nehomogenita odlitku.

7. Napětí indukované v cívce určíme podle Faradayova indukčního zákona

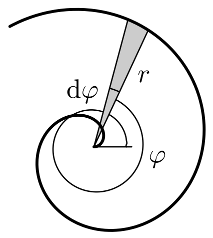
$$u_\mathrm{i} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -S\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = -S \cdot B_\mathrm{m}\omega(-\sin\omega t) = S \cdot B_\mathrm{m}\omega\sin\omega t\,,$$

2 body

kde S je obsah plochy ohraničené cívkou. Ten můžeme určit integrací.

Archimedovu spirálu získáme otáčením průvodiče, jehož délka r se s úhlem otočení φ rovnoměrně zvětšuje. Platí

$$\frac{r}{\varphi} = \frac{R}{n \cdot 2\pi} \quad \rightarrow \quad r = \frac{R}{2n\pi}\varphi\,.$$



Obr. R8

Element ohraničené plochy je (obr. R8)

$$\mathrm{d}S = \frac{r^2\mathrm{d}\varphi}{2} = \frac{R^2}{8\pi^2n^2}\varphi^2\mathrm{d}\varphi\,.$$

Integrací dostaneme

$$S = \frac{R^2}{8n^2\pi^2}\int_0^{2n\pi}\varphi^2\,\mathrm{d}\varphi = \frac{n\pi R^2}{3}\,.$$

5 bodů

Napětí indukované v cívce je tedy

$$u_\mathrm{i} = \frac{n\pi R^2}{3} \cdot B_\mathrm{m}\omega\sin\omega t = \frac{2n\pi^2R^2fB_\mathrm{m}}{3}\sin\omega t = U_\mathrm{m}\sin\omega t\,.$$

Amplituda napětí je

$$U_\mathrm{m} = \frac{2n\pi^2R^2fB_\mathrm{m}}{3} = 22\ \mathrm{mV}\,.$$

3 body

Jiný způsob určení obsahu plošného obsahu spirálové cívky:

Cívku si můžeme přibližně nahradit sériově spojenými kruhovými závity o poloměrech

$$\frac{R}{2n},\ 3\frac{R}{2n},\ 5\frac{R}{2n},\ \ldots\ (2n-1)\frac{R}{2n}\,.$$

Celkový plošný obsah všech závitů je tedy

$$S = \frac{\pi R^2}{4n^2}\left[1^2 + 3^2 + 5^2 + \ \cdots\ (2n-1)^2\right] = \frac{\pi R^2}{4n^2} \cdot \frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1) =$$

$$= \frac{\pi R^2}{4n^2} \cdot \frac{n(4n^2-1)}{3} \approx \frac{n\pi R^2}{3}\,.$$

Vzorec, podle kterého jsme upravili součet n druhých mocnin lichých čísel, snadno dokážeme matematickou indukcí.