Řešení úloh celostátního kola 48. ročníku fyzikální olympiády.

Autoři úloh: J. Jírů (1), P. Šedivý (2) a Kvant (3, 4)

1. a) Zvolme souřadnicovou osu x procházející oběma hmotnými body a s počátkem v bodě s nábojem Q. Pak elektrický potenciál na spojnici obou nábojů v bodě o souřadnici x je

$$\varphi = k\frac{Q}{x} + k\frac{nQ}{r-x}\,. \tag{1}$$

Hledáme maximum této funkce splňující podmínku $0 < x < r$. Provedeme derivaci podle x:

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = kQ\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{n}{(r-x)^2}\right)\,.$$

Z podmínky nulové hodnoty derivace plyne $x_1 = \dfrac{r}{\sqrt{n}+1}$.

(Nulová hodnota derivace je ekvivalentní podmínce nulové intenzity elektrického pole, kterou je možné při řešení použít jako podmínku výchozí místo derivování potenciálu, známe-li vztah $E_x = -\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$).

Dosazením $x = x_1$ do rovnice (1) dostaneme $\varphi_{\max} = \dfrac{kQ}{r}(1+\sqrt{n})^2$.

(Že se jedná o maximum, je zřejmé z toho, že $\lim\limits_{x\to 0}\varphi = \lim\limits_{x\to r}\varphi = -\infty$.)

Číselně vychází $x_1 = 0{,}309r = 0{,}0618$ m, $\varphi_{\max} = -471$ kV.

4 body

b) Ze zákona zachování energie plyne pro limitní kinetickou energii urychleného elektronu $E_\mathrm{k} = -e\varphi_{\max}$. Klasicky platí $\frac{1}{2}m_0v^2 = e\cdot\dfrac{k|Q|}{r}(1+\sqrt{n})^2$,

$$v = \sqrt{2}(1+\sqrt{n})\sqrt{\frac{e}{m_0}}\sqrt{\frac{k|Q|}{r}} = (1+\sqrt{n})\sqrt{\frac{2ke|Q|}{m_0r}}\,.$$

Podle teorie relativity je splněna rovnice

$$m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} - 1\right) = e\cdot\frac{k|Q|}{r}(1+\sqrt{n})^2\,.$$

Z rovnice plyne $v = c\sqrt{1 - \dfrac{m_0^2c^4}{\left(m_0c^2 + e\cdot\dfrac{k|Q|}{r}(1+\sqrt{n})^2\right)^2}}\,.$

Číselně vychází podle klasické fyziky $v = 4{,}07\cdot 10^8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, podle teorie relativity $v = 0{,}854c = 2{,}56\cdot 10^8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Skutečnosti pro dané číselné hodnoty odpovídá pouze relativistický výsledek.

6 bodů

2. a) Poloměry trajektorií jsou

$$r_1 = \frac{v_1 T}{2\pi} = 1{,}75 \cdot 10^9 \text{ m} = 0{,}012 \text{ AU}\,, \quad r_2 = \frac{v_2 T}{2\pi} = 8{,}00 \cdot 10^9 \text{ m} = 0{,}053 \text{ AU}\,,$$

1 bod

b) Gravitační síly, kterými na sebe obě složky dvojhvězdy vzájemně působí, se uplatňují jako síly dostředivé. Platí

$$\frac{\varkappa m_1 m_2}{(r_1+r_2)^2} = m_1 \frac{4\pi^2}{T^2} r_1\,, \qquad \frac{\varkappa m_1 m_2}{(r_1+r_2)^2} = m_2 \frac{4\pi^2}{T^2} r_2\,.$$

Vydělíme-li první rovnici m_1, druhou rovnici m_2 a obě rovnice sečteme, dostaneme

$$\frac{\varkappa (m_1+m_2)}{(r_1+r_2)^2} = \frac{4\pi^2}{T^2}(r_1+r_2)\,,$$

$$m_1 + m_2 = \frac{4\pi^2}{\varkappa T^2}(r_1+r_2)^3 = \frac{T}{2\pi\varkappa}(v_1+v_2)^3 = 8{,}96 \cdot 10^{30} \text{ kg}\,.$$

Dále platí $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{r_2}{r_1} = \dfrac{v_2}{v_1}$. Z toho

$$m_1 = (m_1+m_2)\frac{v_2}{v_1+v_2} = \frac{T}{2\pi\varkappa} v_2 (v_1+v_2)^2 = 7{,}35 \cdot 10^{30} \text{ kg} = 3{,}7 m_\odot\,,$$

$$m_2 = (m_1+m_2)\frac{v_1}{v_1+v_2} = \frac{T}{2\pi\varkappa} v_1 (v_1+v_2)^2 = 1{,}61 \cdot 10^{30} \text{ kg} = 0{,}81 m_\odot\,.$$

4 body

c) Gravitační síly vzájemného působení mají velikost

$$F = \frac{\varkappa m_1 m_2}{(r_1+r_2)^2} = \frac{v_1 v_2 (v_1+v_2)^2}{\varkappa} = 8{,}3 \cdot 10^{30} \text{ N}\,.$$

1 bod

d) Obě složky Algolu se střídavě přibližují k Zemi a vzdalují od Země. Pro meně hmotnou složku Algolu je maximální rychlost vzdalování

$$v' = v_2 + v_c + v_z \cos\beta \doteq 237 \text{ km/s}$$

a maximální rychlost přibližování

$$v'' = v_2 - v_c + v_z \cos\beta \doteq 229 \text{ km/s}\,.$$

V prvním případě se v důsledku Dopplerova jevu změří maximální vlnová délka spektrální čáry

$$\lambda' = \lambda_0 \sqrt{\frac{c+v'}{c-v'}} \approx \lambda_0 \left(1 + \frac{v'}{c}\right) = 767{,}10 \text{ nm}\,,$$

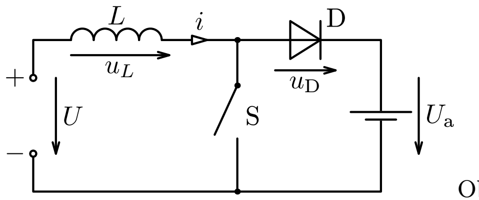
V druhém případě je změřená vlnová délka minimální a má hodnotu

$$\lambda'' = \lambda_0 \sqrt{\frac{c-v''}{c+v''}} \approx \lambda_0 \left(1 - \frac{v''}{c}\right) = 765{,}91 \text{ nm}\,.$$

4 body

3. a) Ve schématu vyznačíme veličiny i, u_L a u_D, které nás zajímají (obr. R1). Při zvolené orientaci platí

$$u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{u_L}{L}\,.$$



Obr. R1

Sepnutím spínače na začátku časového intervalu τ_1 rozdělíme celý obvod na dva samostatné okruhy. Součet napětí v každém z nich je nulový. V levém okruhu platí

$$u_L - U = 0 \quad \Rightarrow \quad u_L = U\,, \quad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{U}{L} = \text{konst} > 0\,,$$

proud cívkou tedy z počáteční nulové hodnoty rovnoměrně poroste a v čase $t = \tau_1$ dosáhne hodnoty I_max, pro kterou platí

$$\frac{\Delta i}{\Delta t} = \frac{I_\mathrm{max}}{\tau_1} = \frac{U}{L} \quad \Rightarrow \quad I_\mathrm{max} = \frac{U\tau_1}{L} = 0{,}050\ \mathrm{A}\,.$$

V pravém okruhu během časového intervalu τ_1 platí

$$u_\mathrm{D} + U_\mathrm{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_\mathrm{D} = -U_\mathrm{a} < 0\,.$$

Dioda je tedy v intervalu τ_1 zapojena v závěrném směru a proud v pravém okruhu je nulový.

3 body

V okamžiku rozpojení spínače na začátku časového intervalu τ_2 se proud cívkou nepřeruší, ale pronikne do diody, která se dostane do propustného stavu, a napětí na ní bude nulové. Celé zapojení se změní na jediný okruh, ve kterém platí

$$u_L + u_\mathrm{D} + U_\mathrm{a} - U = u_L + U_\mathrm{a} - U = 0 \quad \Rightarrow \quad u_L = U - U_\mathrm{a} = \text{konst} < 0\,.$$

Napětí na cívce má opačný směr než procházející proud, který se bude z počáteční hodnoty I_max zmenšovat podle vztahu

$$\frac{\Delta i}{\Delta t} = \frac{i - I_\mathrm{max}}{t} = \frac{U - U_\mathrm{a}}{L} \quad \Rightarrow \quad i = I_\mathrm{max} - \frac{U_\mathrm{a} - U}{L}t$$

(t měříme od začátku intervalu τ_2). Proud klesne na nulu za dobu

$$\tau_3 = \frac{I_\mathrm{max}L}{U_\mathrm{a} - U} = \frac{U}{U_\mathrm{a} - U}\tau_1 = 0{,}00714\ \mathrm{s} < \tau_2\,.$$

Ve zbývajícím čase do konce intervalu τ_2 přejde dioda do závěrného stavu, cívkou přestane procházet proud a napětí na ni klesne na nulu. Napětí na diodě se naopak změní z nuly na $U - U_\mathrm{a} = -7\ \mathrm{V}$.

5 bodů

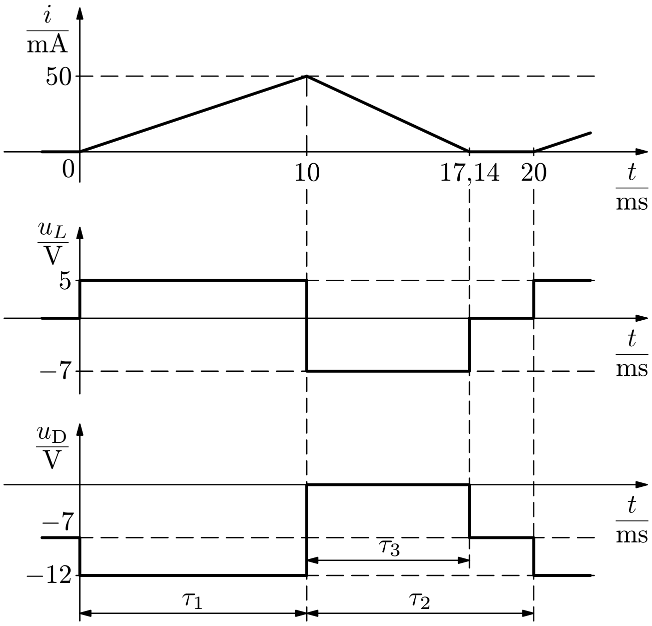
b) Nabíjecí proud prochází do akumulátoru jen v časovém intervalu τ_3 a jeho velikost se lineárně zmenšuje z I_max na nulu. Za tuto dobu projde do akumulátoru náboj

$$Q = \frac{I_{\max}\tau_3}{2} = \frac{U^2\tau_1^2}{2L(U_\mathrm{a} - U)}\,.$$

Střední hodnota nabíjecího proudu je

$$I_\text{stř} = \frac{Q}{\tau_1 + \tau_2} = \frac{U^2\tau_1^2}{2L(U_\mathrm{a} - U)(\tau_1 + \tau_2)} = 8{,}9\ \mathrm{mA}\,.$$

2 body



Obr. R2

4. a) Zvolme vztažnou soustavu podle obr. R3 a označme α úhel, který svírá úsečka OA se zápornou poloosou y. Po odtržení od kola koná kapka vrh šikmo dolů s počáteční rychlostí o velikosti $v_0 = R\omega$ a s elevačním úhlem $-\alpha$, který popisují parametrické rovnice

$$x = -R\sin\alpha + v_0 t\cos\alpha\,, \tag{1}$$

$$y = -R\cos\alpha - v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2\,. \tag{2}$$

2 body

V okamžiku dopadu platí $x = 0$, $y = -H$. Po dosazení do (1) a (2) dostaneme

$$t = \frac{R\,\mathrm{tg}\,\alpha}{v_0} = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\omega}\,, \tag{3}$$

$$-R\cos\alpha - R\,\mathrm{tg}\,\alpha\sin\alpha - \frac{g\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}{2\omega^2} = -H\,. \tag{4}$$

Úpravou (4) dojdeme ke kvadratické rovnici $(g+2\omega^2 H)\cos^2\alpha - 2\omega^2 R\cos\alpha - g = 0$. Úloze vyhovuje kladný kořen

$$\cos\alpha = \frac{\omega^2 R + \sqrt{\omega^4 R^2 + g^2 + 2gH\omega^2}}{g + 2\omega^2 H}\,.$$

Dobu letu pak vypočítáme dosazením do (3).
Pro dané hodnoty vychází $\cos\alpha = 0{,}6034$, $\alpha = 52{,}9^\circ$, $t = 0{,}264$ s.

5 bodů

Jiný způsob výpočtu doby letu kapky: Pohyb kapky probíhá jako pohyb složený z rovnoměrného přímočarého pohybu rychlostí $\boldsymbol{v}_0$ a volného pádu. Z obr. R4 plyne

$$\sqrt{R^2 + v_0^2 t^2} + \frac{1}{2}gt^2 = H\,.$$

Úpravou dojdeme k rovnici $\quad \dfrac{g^2}{4}t^4 - (\omega^2 R^2 + gH)t^2 + H^2 - R^2 = 0\,.$

Úloze vyhovuje kořen $\quad t^2 = \dfrac{2}{g^2}\left(\omega^2 R^2 + gH - R\sqrt{\omega^4 R^2 + 2\omega^2 gH + g^2}\right)\,,$

neboť doba letu kapky je jistě menší než doba volného pádu z výšky H, která je $\sqrt{2H/g}$.

b) Velikost v_d rychlosti dopadu určíme užitím zákona zachování energie:

$$\frac{1}{2}mv_\mathrm{d}^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + mg(H - R\cos\alpha)$$

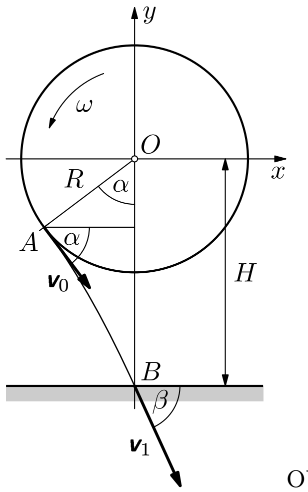
Z toho

$$v_\mathrm{d} = \sqrt{v_0^2 + 2g(H - R\cos\alpha)} = \sqrt{\omega^2 R^2 + 2g(H - R\cos\alpha)} = 7{,}24\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

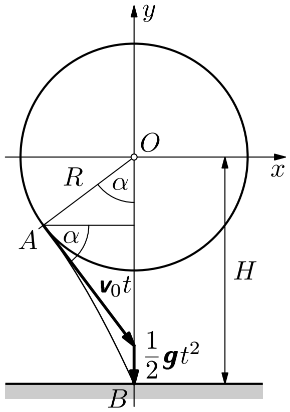
Vodorovná složka rychlosti kapky se během vrhu nemění. Proto

$$v_0\cos\alpha = v_\mathrm{d}\cos\beta \quad\Rightarrow\quad \cos\beta = \frac{v_0\cos\alpha}{v_\mathrm{d}} = 0{,}4168\,,\quad \beta = 65{,}4^\circ\,.$$

3 body


y
ω
O
x
R
α
A
α
$\boldsymbol{v}_0$
H
B
β
$\boldsymbol{v}_1$

Obr. R3


y
O
x
R
α
A
α
$\boldsymbol{v}_0 t$
H
$\frac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2$
B

Obr. R4