Řešení úloh 1. kola 47. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie B*

Autoři úloh: P. Šedivý (1, 2, 4, 6, 7) a M. Jarešová (3, 5)

1. a) Má-li být vlákno stále napnuto, nesmí být amplituda kmitů větší než prodloužení vlákna v rovnovážné poloze. Zde platí $mg = k\Delta l$, kde k je tuhost vlákna. Je-li vlákno při kmitání koule stále napnuto, platí pro úhlovou frekvenci kmitů

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{g}{\Delta l}\,.$$

Z toho $$A = \Delta l = \frac{g}{\omega^2} = \frac{gT^2}{4\pi^2} = 0{,}358\ \mathrm{m}\,.$$ **1 bod**

b) Potenciální energii soustavy v rovnovážné poloze položme rovnou 0. Při dosažení okamžité výhylky $y = A = \Delta l$ přestane na kouli působit síla vlákna a pohyb pokračuje jako svislý vrh vzhůru. Jeho počáteční rychlost $\boldsymbol{v}_0$ určíme ze zákona zachování energie:

$$\frac{1}{2}kB^2 = \frac{1}{2}kA^2 + \frac{1}{2}mv_0^2\,,$$

$$v_0^2 = \frac{k}{m}(B^2 - A^2) = \omega^2 \cdot 3A^2 = 3\frac{g^2}{\omega^2}\,, \qquad v_0 = \frac{g}{\omega}\sqrt{3}\,.$$

Koule vystoupí nad rovnovážnou polohu do výšky

$$y_{\max} = A + \frac{v_0^2}{2g} = A + \frac{3g}{2\omega^2} = A + \frac{3}{2}A = \frac{5}{2}A = 0{,}895\ \mathrm{m}$$

a v nejvyšší poloze bude pod bodem závěsu vlákna v hloubce

$$l_0 - \frac{3}{2}A = 0{,}163\ \mathrm{m.}$$

3 body

c) Po uvolnění začne koule konat harmonický kmit popsaný rovnicí

$$y = -B\cos(\omega t)\,.$$

Okamžité výchylky $y = A$ dosáhne v čase t_1. Platí

$$A = -2A\cos(\omega t_1) \quad \Rightarrow \quad \cos(\omega t_1) = -\frac{1}{2}\,,$$

$$\omega t_1 = \frac{2\pi}{T}t_1 = \frac{2\pi}{3}\,, \qquad t_1 = \frac{T}{3} = 0{,}40\ \mathrm{s}\,.$$

Následující vrh trvá po dobu

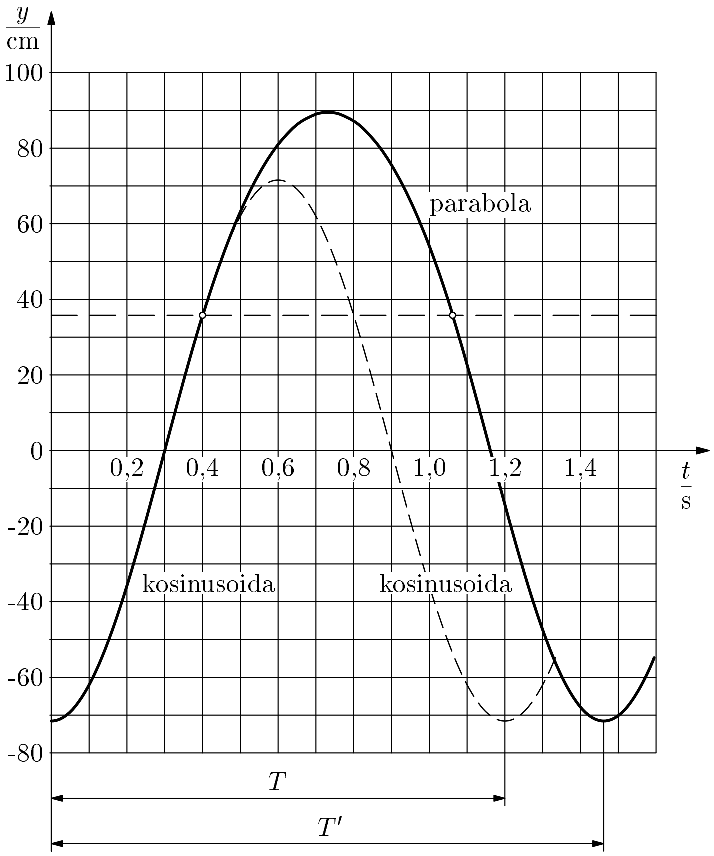
$$t_2 = \frac{2v_0}{g} = \frac{2\sqrt{3}}{\omega} = \frac{T\sqrt{3}}{\pi} = 0{,}662\ \mathrm{s}$$

a po něm proběhne zbytek kmitu, vzhledem k symetrii děje opět za dobu t_1. Celá perioda kmitů je

$$T' = 2t_1 + t_2 = T\left(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{\pi}\right) = 1{,}462\ \mathrm{s}\,.$$

3 body

d)


y
cm
100
80
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4
t
s
parabola
kosinusoida
kosinusoida
T
T′

3 body

2. V úloze počítáme s efektivními hodnotami napětí a proudů. Odpor ideálního ampérmetru je nulový a napětí na něm je nulové. Svorkové napětí zdroje je rovno napětí na kondenzátoru:

$$U = X_C I_1 = \frac{I_1}{\omega C}\,.$$

a) Zapojíme-li do obvodu sériově cívku a kondenzátor, mají napětí na nich opačnou fázi. Platí

$$U = |U_C - U_L| = |X_C - X_L| \cdot 2I_1 = X_C I_1 \quad \Rightarrow \quad 2\left|\frac{1}{\omega C} - \omega L\right| = \frac{1}{\omega C}\,.$$

Rovnice má dvě řešení L_1, L_2:

$$\frac{2}{\omega C} - 2\omega L_1 = \frac{1}{\omega C} \quad \Rightarrow \quad L_1 = \frac{1}{2\omega^2 C} \doteq 0{,}5\ \mathrm{H}\,,$$

$$2\omega L_2 - \frac{2}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} \quad \Rightarrow \quad L_2 = \frac{3}{2\omega^2 C} \doteq 1{,}5\ \mathrm{H}\,.$$

4 body

b) Zmenší-li se po zapojení cívky proud na polovinu, platí

$$U = |U_C - U_L| = |X_C - X_L| \cdot 0{,}5 I_1 = X_C I_1\,,$$

$$\left|\frac{1}{\omega C} - \omega L\right| = \frac{2}{\omega C}\,.$$

Úloze vyhovuje vyhovuje pouze kladné řešení L_3:

$$\omega L_3 - \frac{1}{\omega C} = \frac{2}{\omega C} \quad \Rightarrow \quad L_3 = \frac{3}{\omega^2 C} \doteq 3\ \mathrm{H}\,.$$

3 body

c) Připojíme-li cívku ke kondenzátoru paralelně, mají proudy v obou větvích opačnou fázi. Platí

$$I = |I_L - I_C| = \left|\frac{U}{X_L} - \frac{U}{X_C}\right| = \left|\frac{U}{\omega L} - U\omega C\right| =$$

$$= U\omega C\left|\frac{1}{\omega^2 CL} - 1\right| = I_1\left|\frac{1}{\omega^2 CL} - 1\right|\,.$$

Pro indukčnost L_1 dostaneme proud $I = I_1(2-1) = I_1$, pro indukčnost L_2 dostaneme proud $I = I_1\left|\frac{2}{3} - 1\right| = \frac{I_1}{3}$ a pro indukčnost L_3 dostaneme proud $I = I_1\left|\frac{1}{3} - 1\right| = \frac{2I_1}{3}$.

3 body

3. a) Platí zákon zachování hybnosti a zákon zachování energie:

$$Mv_1 = Mv_1' + mv_2' , \qquad \frac{1}{2}Mv_1^2 = \frac{1}{2}Mv_1'^2 + \frac{1}{2}mv_2'^2$$

(v_1, v_1' a v_2' jsou souřadnice rychlostí.) Řešením této soustavy rovnic dostaneme

$$v_1' = \frac{M-m}{M+m}v_1 . \qquad \text{Pak} \quad E_{\mathrm{k}1}' = \frac{1}{2}M\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 v_1^2 .$$

3 body

b) $$k = \frac{E_{\mathrm{k}1}'}{E_{\mathrm{k}1}} = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 = \left(\frac{1-\dfrac{m}{M}}{1+\dfrac{m}{M}}\right)^2 .$$

1 bod

c) Protože $M > 0$ a $m > 0$, platí zřejmě $0 \leq k < 1$.

$k = 0$, jestliže $\dfrac{m}{M} = 1$. V takovém případě se při srážce kinetická energie úplně předá částici o hmotnosti m.

Pokud $m \ll M$, můžeme zlomek $\dfrac{m}{M}$ zanedbat oproti 1. Pak $k \approx 1$.

Pokud $m \gg M$, můžeme 1 zanedbat oproti zlomku $\dfrac{m}{M}$. Pak opět $k \approx 1$. V obou případech si částice o hmotnosti M při srážce ponechá téměř celou kinetickou energii.

2 body

d) Známe-li relativní atomové hmotnosti částic, můžeme poměr k vyjádřit ve tvaru

$$k = \left(\frac{A_\mathrm{r}(\mathrm{C}) - A_\mathrm{r}(\mathrm{n})}{A_\mathrm{r}(\mathrm{n}) + A_\mathrm{r}(\mathrm{C})}\right)^2 = 0{,}714 .$$

2 body

e) Musí platit $k^n < 0{,}1$, po zlogaritmování $n \cdot \log k < -1$.

Protože $\log k < 0$, musí platit $n > -\dfrac{1}{\log k} = 6{,}8$.

Musí proběhnout nejméně 7 srážek.

2 body

4. a) Při průchodu proudu o okamžité hodnotě i působí na tyčinku vodorovným směrem magnetická síla o velikosti $F = Bil$. Za velmi krátkou dobu Δt udělí tyčince impuls o velikosti

$$\Delta p = F\Delta t = Bi\Delta t = Bl\Delta Q\,,$$

kde ΔQ je náboj, který za dobu Δt prošel tyčinkou. Celkový náboj, který během vybíjení kondenzátoru projde tyčinkou, je $Q = CU$. Celkový impuls, který magnetická síla udělí tyčince, je tedy

$$p = mv = BlQ = BlCU\,.$$

3 body

Tyčinka získá počáteční rychlost $v = \dfrac{p}{m} = \dfrac{BlCU}{m}$. Úhel α, o který se vychýlí závěsy z rovnovážné polohy, určíme užitím zákona zachování energie:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgl_1(1-\cos\alpha) \quad \Rightarrow \quad 1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{v^2}{2gl_1} = \frac{B^2C^2U^2l^2}{2gl_1m^2}\,.$$

Pak $\quad \alpha = 2\arcsin\dfrac{BCUl}{2m\sqrt{gl_1}}$,

Pro dané hodnoty $\quad \alpha = 2\arcsin 0{,}1030 = 11{,}8^\circ$.

3 body

b) Výchylka závěsů závisí na velikosti náboje, který prošel tyčinkou, zařízení tedy může sloužit jako měřič náboje.
Pro malé výchylky, což je i případ úlohy a), můžeme psát

$$\arcsin\frac{BCUl}{2m\sqrt{gl_1}} \approx \frac{BCUl}{2m\sqrt{gl_1}}\,.$$

Pak $\quad \alpha \approx \dfrac{BCUl}{m\sqrt{gl_1}} = \dfrac{Bl}{m\sqrt{gl_1}}Q\,, \qquad Q = \dfrac{m\sqrt{gl_1}}{Bl}\alpha = A\alpha.$

Prošlý náboj je přímo úměrný výchylce závěsu. V našem případě má konstanta úměrnosti hodnotu

$$A = \frac{m\sqrt{gl_1}}{Bl} = 0{,}485\ \mathrm{C}\cdot\mathrm{rad}^{-1}\,.$$

Při známé kapacitě C kondenzátoru může zařízení sloužit jako voltmetr pro měření napětí zdroje, ze kterého jsme nabili kondenzátor. Přitom můžeme použít srovnávací metodu. Pro dvě různá napětí a odpovídající výchylky platí $U_1 : U_2 = \alpha_1 : \alpha_2$. Známe-li naopak napětí zdroje U, můžeme z výchylek porovnat kapacity dvou různých kondenzátorů: $\quad C_1 : C_2 = \alpha_1 : \alpha_2$.

4 body

5. a) Vyjdeme z obr. R1. Na cívku působí tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$, síla vlákna $\boldsymbol{F}$ a reakce podložky, která má normálovou složku $\boldsymbol{F}_\mathrm{n}$ a tečnou složku $\boldsymbol{F}_\mathrm{t}$ (smykové tření). Platí $F_\mathrm{n} = F_G$. Řešením soustavy pohybových rovnic

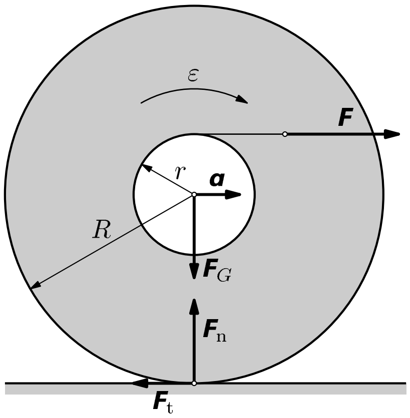
$$F - F_\mathrm{t} = ma = mR\varepsilon\,, \qquad (1)$$

$$Fr + F_\mathrm{t}R = J_0\varepsilon \qquad (2)$$

dostaneme

$$\varepsilon = \frac{F(R+r)}{J_0 + mR^2}\,, \qquad (3)$$

$$F_\mathrm{t} = F \cdot \frac{J_0 - mRr}{J_0 + mR^2}\,. \qquad (4)$$



Obr. R1

Třecí síla může maximálně dosáhnout velikosti $F_\mathrm{tmax} = mgf$. Pak

$$F_\mathrm{max} = F_\mathrm{tmax} \cdot \frac{J_0 + mR^2}{J_0 - mRr} = \frac{mgf(J_0 + mR^2)}{J_0 - mRr} = 246\ \mathrm{N}\,,$$

$$\varepsilon = \frac{mgf(R+r)}{J_0 - mRr} = 144\ \mathrm{rad \cdot s^{-2}}\,.$$

5 bodů

b) Vyjdeme z obr R2, úlohu pak řešíme stejně jako a), pouze rovnice (2) se změní na

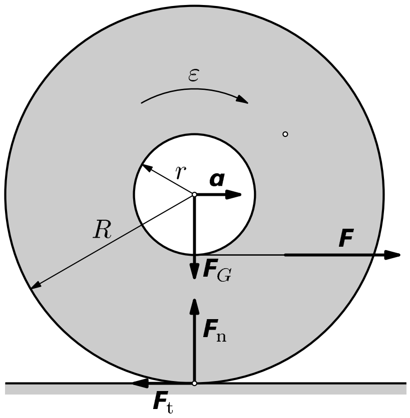
$$F_\mathrm{t}R - Fr = J_0\varepsilon\,. \qquad (2')$$

Řešením upravené soustavy rovnic dostaneme

$$F_\mathrm{max} = \frac{mgf(J_0 + mR^2)}{J_0 + mRr} = 27\ \mathrm{N}\,,$$

$$\varepsilon = \frac{mgf(R-r)}{J_0 + mRr} = 7\ \mathrm{rad \cdot s^{-2}}\,.$$

5 bodů



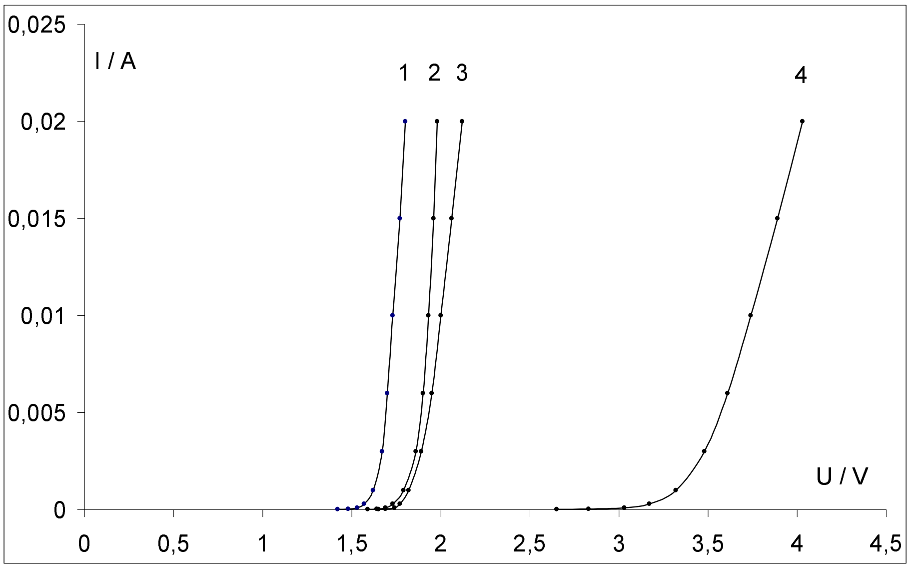
Obr. R2

6. Příklad zpracování praktické úlohy zachycují následující tabulky a grafy. Byly použity diody (výrobce Kingbright):

1. L-53SRC-F (červená, $\lambda_{\mathrm{m}} = 640$ nm),
2. L-53SYC-E*G (žlutá, $\lambda_{\mathrm{m}} = 590$ nm),
3. L-53SGC*G (zelená, $\lambda_{\mathrm{m}} = 567$ nm),
4. L-53MBCK (modrá, $\lambda_{\mathrm{m}} = 466$ nm).

Hodnoty vlnových délek λ_{m} udávané výrobcem souhlasily s hodnotami naměřenými pomocí optické mřížky v úkolu c). Hodnoty získané měřením v zapojení podle obr. 5 byly zpracovány programem EXCEL. Celkový vzhled voltampérových charakteristik je zřejmý z grafů na obr. R8. Z nich je zřejmé, že provozní napětí diod s rostoucí vlnovou délkou λ_{m} klesá – největší je u diody modré, nejmenší u červené.

I / A	0,00001	0,00003	0,0001	0,0003	0,001	0,003	0,006	0,01	0,015	0,02
U_R / V	1,42	1,48	1,53	1,57	1,62	1,67	1,7	1,73	1,77	1,8
U_Y / V	1,59	1,64	I.00	1,73	1,79	1,86	1,9	1,93	1,96	1,98
U_G / V	1,65	1,69	1,74	1,77	1,82	1,89	1,95	2	2,06	2,12
U_B / V	2,65	2,83	3,03	3,17	3,32	3,48	3,61	3,74	3,89	4,03
ln I	-11,513	-10,414	-9,210	-8,112	-6,908	-5,809	-5,116	-4,605	-4,200	-3,912



Obr. R8

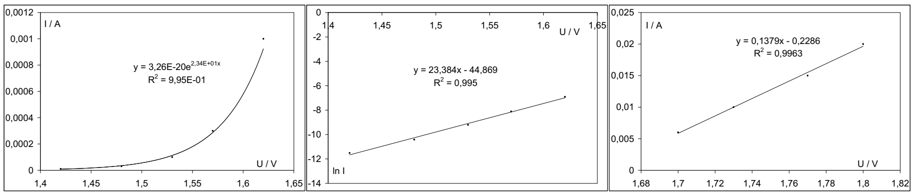
Ověření exponenciálního průběhu charakteristiky pro $I < 1$ mA a lineárního průběhu pro $I > 5$ mA provedeme regresní analýzou příslušných částí charakteristik. Z ní také získáme hodnoty veličin A, B a r pro jednotlivé diody. Na obr. R9 je to provedeno pro diodu č. 1.

Exponenciální průběh charakteristiky pro proudy do 1 mA můžeme ověřit vložením exponenciálního trendu podle obr. R9a. Z rovnice trendu přímo čteme hodnoty veličin A a B. Nebo vyjdeme z linearizovaného vztahu $\ln I = \ln A + BU$ a použijeme lineární regresi (obr. R9b). [1]

Lineární průběh charakteristiky pro proudy nad 5 mA ověříme lineární regresí podle obr. R9c. V rovnici regresní přímky $y = ax + b$ odpovídá proměnná y číselné hodnotě proudu a proměnná x číselné hodnotě napětí. Z toho plyne

$$\{r\} = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{a}\,.$$

Diferenciální odpor diody r odpovídá ohmickému odporu oblastí P a N v diodě.



Obr. R9 a b c

Výsledky získané regresní analýzou charakteristik diod jsou v následující tabulce. Zde jsou také uvedeny hodnoty provozních napětí diod a energie fotonů světla o vlnové délce λ_m

$$E = hf_\mathrm{m} = \frac{hc}{\lambda_\mathrm{m}}$$

přepočítané na eV. U většiny diod jsou téměř stejné jako elektrická práce $W = U_\mathrm{p}e$ spojená s průchodem elektronu diodou při provozním napětí U_p. U modré diody je tato práce asi o polovinu větší.

Barva	$\frac{\lambda_\mathrm{m}}{\mathrm{nm}}$	$\frac{h \cdot c \cdot \lambda_\mathrm{m}^{-1}}{\mathrm{eV}}$	$\frac{U_\mathrm{p}}{\mathrm{V}}$	$\frac{A}{\mathrm{A}}$	$\frac{B}{\mathrm{V}^{-1}}$	$\frac{r}{\Omega}$
červená	640	1,94	1,80	$3{,}26 \cdot 10^{-20}$	23,4	7,3
žlutá	590	2,10	1,98	$6{,}41 \cdot 10^{-22}$	23,4	5,7
zelená	567	2,19	2,12	$2{,}65 \cdot 10^{-25}$	27,3	12,1
modrá	466	2,66	4,03	$1{,}27 \cdot 10^{-13}$	6,82	30,0

[1] Veličina A udává nasycený proud diodou zapojenou v závěrném směru. Pro veličinu B plyne z teorie přechodu PN vztah $B = \dfrac{e}{mkT}$, kde e je elementární náboj, k je Boltzmannova konstanta, T je teplota přechodu a m je rekombinační koeficient, který se většinou pohybuje mezi 1 a 2, u modré diody je větší.

7. Nejprve určíme hmotnost M vodní páry, která ze 1 sekundu vznikne shořením vodíku ve spalovací komoře. Hoření je popsáno rovnicí

$$2H_2 + O_2 = 2H_2O\,.$$

Ze dvou molekul vodíku a jedné molekuly kyslíku vzniknou dvě molekuly vodní páry. Proto

$$\frac{M}{m} = \frac{M_\mathrm{r}(H_2O)}{M_\mathrm{r}(H_2)} = \frac{18{,}015}{2{,}016} = 8{,}94\,, \qquad M = 8{,}94m \doteq 450\ \mathrm{kg}\,.$$

2 body

Při výstupu z trysky má vodní pára o hmotnosti M objem V, který určíme ze stavové rovnice:

$$\frac{pV}{T} = \frac{M}{M_\mathrm{m}}R \quad \Rightarrow \quad V = \frac{MRT}{pM_\mathrm{m}} = \frac{8{,}94mRT}{pM_\mathrm{m}}\,,$$

kde $M_\mathrm{m} = 18{,}015 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot mol^{-1}}$ je molární hmotnost vody. Tento objem je číselně roven objemovému průtoku

$$Q_V = \frac{V}{\tau} = Sv\,,$$

kde $\tau = 1$ s je uvažovaná doba a v je rychlost vytékající vodní páry. Z toho

$$v = \frac{V}{\tau S} = \frac{8{,}94mRT}{p\tau SM_\mathrm{m}} = 3\,900\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}\,.$$

4 body

Jestliže vodní páře o hmotnosti M udělíme za dobu τ rychlost v, vznikne reakční síla

$$F_\mathrm{r} = \frac{Mv}{\tau} = \frac{8{,}94mv}{\tau}\,.$$

Celková tahová síla motoru je rovna součtu reakční síly a statické tlakové síly:

$$F = \frac{Mv}{\tau} + pS = \frac{8{,}94^2m^2RT}{p\tau^2SM_\mathrm{m}} + pS = 1{,}73 \cdot 10^6\ \mathrm{N} + 5 \cdot 10^4\ \mathrm{N} = 1{,}8 \cdot 10^6\ \mathrm{N}\,.$$

4 body