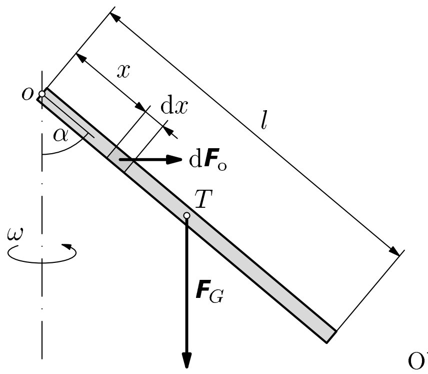
Řešení úloh celostátního kola 47. ročníku fyzikální olympiády.

Autor úloh: P. Šedivý

1. a) Úlohu budeme řešit z hlediska pozorovatele ve vztažné soustavě otáčející se spolu s vychýlenou tyčí okolo svislé osy rotoru. Určíme nejprve celkový moment odstředivých sil působících na jednotlivé části tyče vzhledem k vodorovné ose o procházející koncem tyče (obr. R1). Na element tyče délky $\mathrm{d}x$ ve vzdálenosti x od osy o působí odstředivá síla $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_\mathrm{o}$ momentem o velikosti

$$\mathrm{d}M = |\mathrm{d}\boldsymbol{F}_\mathrm{o}| \cdot x\cos\alpha = \mathrm{d}m\,\omega^2 x\sin\alpha \cdot x\cos\alpha = \frac{\mathrm{d}x}{l} m\omega^2 x^2 \sin\alpha\cos\alpha\,.$$



Obr. R1

Celkový moment odstředivých sil dostaneme integrací:

$$M = \frac{m\omega^2 \sin\alpha\cos\alpha}{l}\int_0^l x^2\,\mathrm{d}x = m\omega^2\sin\alpha\cos\alpha\frac{l^2}{3} = m\omega^2\sin 2\alpha\frac{l^2}{6}\,. \tag{1}$$

3 body

Proti němu působí momont tíhové síly

$$M' = mg\frac{l}{2}\sin\alpha\,. \tag{2}$$

Pokud tyč vychýlíme jen nepatrně ze svislé rovnovážné polohy, například v důsledku chvění, které se vždy v takovéto rotující soustavě vyskytuje, můžeme psát

$$\sin\alpha \approx \alpha\,, \qquad \sin 2\alpha \approx 2\sin\alpha \approx 2\alpha\,.$$

Pak

$$M \approx \frac{m\omega^2 l^2\alpha}{3}\,, \qquad M' = \frac{mgl\alpha}{2}\,.$$

Jestliže $M < M'$, je svislá rovnovážná poloha stabilní, tyč se po malém vychýlení vrátí do svislé polohy. Jestliže $M > M'$, je svislá rovnovážná poloha labilní, tyč se při sebemenší výchylce z rovnovážné polohy bude dále vychylovat, dokud se oba momenty nevyrovnají. Kritická úhlová rychlost ω_0 je taková, pro kterou při malé výchylce z rovnovážné polohy platí $M = M'$. Z rovnosti

$$\frac{m\omega_0^2 l^2 \alpha}{3} = \frac{mgl\alpha}{2}$$

dostaneme

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2l}}\,.$$

2 body

b) Odchylku tyče od svislého směru po překročení kritické úhlové rychlosti určíme z rovnosti momentu odstředivých sil a momentu tíhové síly podle (1) a (2):

$$m\omega^2 \sin\alpha\cos\alpha\frac{l^2}{3} = mg\frac{l}{2}\sin\alpha\,, \qquad \cos\alpha = \frac{3g}{2\omega^2 l}\,,$$

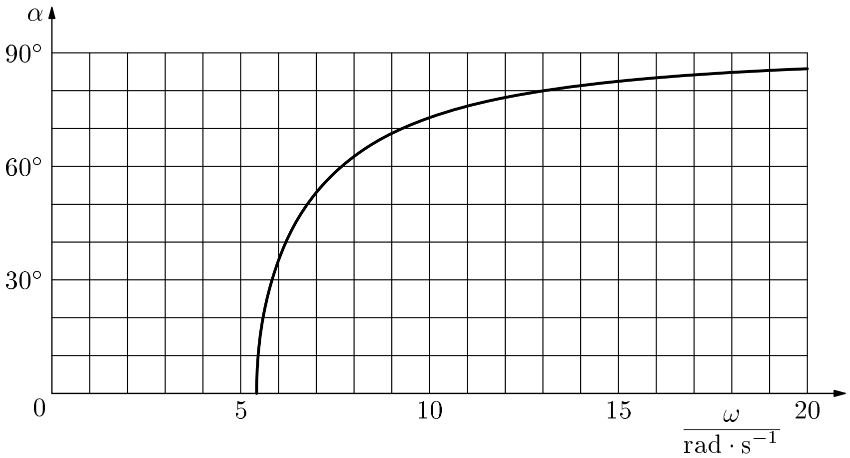
$$\alpha = \arccos\frac{3g}{2\omega^2 l}\,. \tag{3}$$

2 body

c) Pro $l = 0{,}50$ m dostaneme $\omega_0 = 5{,}42\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$.

Pomocí vztahu (3) vyplníme tabulku a sestrojíme graf (obr. R2):

$\omega/\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$	5,42	6	7	8	10	12	15	20
$\cos\alpha$	1	0,8175	0,6006	0,4598	0,2943	0,2044	0,1308	0,0736
α	0°	35,2°	53,1°	62,6°	72,9°	78,2°	82,5°	85,8°



Obr. R2

Odchylky 60° dosáhneme, když

$$\frac{3g}{2\omega^2 l} = \frac{1}{2}\,, \qquad \omega = \sqrt{\frac{3g}{l}} = 7{,}67\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}\,.$$ **3 body**

2. a) Z rovnosti gravitační a dostředivé síly

$$\frac{\varkappa Mm}{R^2} = \frac{mv^2}{R} = \frac{4\pi^2 mR}{T^2} \tag{1}$$

odvodíme

$$v = \sqrt{\frac{\varkappa M}{R}} = 7\,720\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{\varkappa M}} = 5\,460\ \mathrm{s}\,.$$

2 body

b) Celková mechanická energie E družice je rovna součtu energie kinetické a energie potenciální:

$$E = E_\mathrm{k} + E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\varkappa Mm}{R}\,.$$

Z (1) odvodíme $E_\mathrm{k} = \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{\varkappa Mm}{2R} = -\dfrac{E_\mathrm{p}}{2}$. Pak

$$E = \frac{E_\mathrm{p}}{2} = -E_\mathrm{k} = -\frac{\varkappa Mm}{2R} = -\frac{mv^2}{2}\,. \tag{2}$$

Celková mechanická energie družice je záporná. Pro dané hodnoty $E = -4{,}46\cdot 10^9$ J.

3 body

c) Působením odporové síly se během jednoho oběhu celková mechanická energie družice zmenší o spotřebovanou práci: $\Delta E = -F\cdot 2\pi R$. Z (2) plyne, že poloměr trajektorie se zmenší, ale rychlost družice se zvětší.

1 bod

Pro změnu rychlosti bude platit

$$-\frac{m(v+\Delta v)^2}{2} - \left(-\frac{mv^2}{2}\right) = -mv\Delta v - \frac{m(\Delta v)^2}{2} = -F\cdot 2\pi R\,.$$

Po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici

$$(\Delta v)^2 + 2v\Delta v - \frac{4\pi RF}{m} = 0\,,$$

jejímž řešením dostaneme

$$\Delta v = -v \pm \sqrt{v^2 + \frac{4\pi RF}{m}}\,.$$

Podle předcházející úvahy se musí velikost rychlosti družice zvětšit, vyhovovat bude pouze řešení

$$\Delta v = -v + \sqrt{v^2 + \frac{4\pi RF}{m}} = -\sqrt{\frac{\varkappa M}{R}} + \sqrt{\frac{\varkappa M}{R} + \frac{4\pi RF}{m}} = 0{,}273\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

2 body

Pro změnu poloměru bude platit

$$-\frac{\varkappa Mm}{2(R+\Delta R)} - \left(-\frac{\varkappa Mm}{2R}\right) = \frac{\varkappa Mm\Delta R}{2(R+\Delta R)R} = -F\cdot 2\pi R\,.$$

Z toho

$$\Delta R = -\frac{4\pi F R^3}{\varkappa Mm + 4\pi R^2 F} = -474\ \mathrm{m}\,.$$

2 body

Ke stejným výsledkům můžeme rychleji dojít pomocí aproximací:
Pro změnu rychlosti bude platit

$$-\frac{m(v+\Delta v)^2}{2} - \left(-\frac{mv^2}{2}\right) \approx -mv\Delta v = -F\cdot 2\pi R\,,$$

$$\Delta v = \frac{2\pi RF}{mv} = \frac{2\pi RF}{m\sqrt{\dfrac{\varkappa M}{R}}} = \frac{2\pi F R^{1,5}}{m\sqrt{\varkappa M}} = 0{,}273\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

Pro změnu poloměru bude platit

$$-\frac{\varkappa Mm}{2(R+\Delta R)} - \left(-\frac{\varkappa Mm}{2R}\right) = \frac{\varkappa Mm\Delta R}{2(R+\Delta R)R} \approx \frac{\varkappa Mm\Delta R}{2R^2} = -F\cdot 2\pi R\,,$$

$$\Delta R = -\frac{4\pi F R^3}{\varkappa Mm} = -474\ \mathrm{m}\,.$$

3. a) Okamžité napětí na kondenzátoru kolísá jen nepatrně okolo průměrné hodnoty U_C. Po dobu trvání impulzu se kondenzátor nabíjí a jeho náboj se zvětší o

$$Q_1 = \left(\frac{U_0 - U_C}{r} - \frac{U_C}{R}\right)\tau = \left(\frac{U_0}{r} - \frac{U_C(R+r)}{Rr}\right)\tau\,.$$

Ve zbývající části periody se vybíjí a jeho náboj se zmenší o

$$Q_2 = \left(\frac{U_C}{r} + \frac{U_C}{R}\right)(T-\tau) = \left(\frac{U_C(R+r)}{Rr}\right)(T-\tau)\,.$$

Z rovnosti $Q_1 = Q_2$ dostaneme

$$\frac{U_0}{r}\tau = \frac{U_C(R+r)}{Rr}T\,, \qquad U_C = \frac{U_0 R}{r+R}\cdot\frac{\tau}{T}\,.$$

3 body

Změna napětí na kondenzátoru během trvání impulzu je

$$\Delta U = \frac{Q_1}{C} = \left(\frac{U_0}{r} - \frac{U_C(R+r)}{Rr}\right)\frac{\tau}{C} = \frac{U_0\tau}{rC}\left(1 - \frac{\tau}{T}\right)\,.$$

Stejně velký je pokles napětí ve zbývající části periody.

3 body

b) Dosazením do vztahu $\Delta U \ll U_C$ dostaneme $\dfrac{U_0\tau}{rC}\left(1-\dfrac{\tau}{T}\right) \ll \dfrac{U_0 R}{r+R}\cdot\dfrac{\tau}{T}$,

$$T - \tau \ll C\cdot\frac{Rr}{R+r}\,.$$

2 body

c) Pro dané hodnoty platí

$$8\cdot 10^{-3}\ \mathrm{s} = T - \tau \ll C\cdot\frac{Rr}{R+r} = 0{,}18\ \mathrm{s}\,.$$

Předpoklady úlohy jsou tedy splněny.
Dále vychází $U_C = 0{,}82$ V, $\Delta U = 36$ mV.

2 body

4. *Řešení postupným zobrazením na prvním a druhém rozhraní čočky*

Použijeme zobrazovací rovnici kulového rozhraní ve tvarech

$$n_1\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{a}\right)=n_2\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{a'}\right), \qquad \frac{f}{a}+\frac{f'}{a'}=1,$$

kde $f=\dfrac{n_1R}{n_2-n_1}$, $\quad f'=\dfrac{n_2R}{n_2-n_1}$ jsou ohniskové vzdálenosti,

a vztah pro výpočet příčného zvětšení $\beta=-\dfrac{f}{a-f}$.

1. *Rovinné rozhraní*: $R\to\infty$, $n_1\doteq 1$, $n_2=n=1{,}56$, $a_1=v$.

Z toho $f_1\to\infty$, $\quad f_1'\to\infty$.

Použijeme první tvar zobrazovací rovnice. Z něj plyne

$$a_1'=-\frac{n_2}{n_1}a_1=-nv=-78\ \text{mm}\,.$$

Příčné zvětšení obrazu vytvořeného rovinným rozhraním je $\beta_1=1$.

5 bodů

2. *Kulové rozhraní*: $R=-100$ mm, $n_1=n=1{,}56$, $a_2=-a_1'+d=108$ mm, $n_2\doteq 1$

Použijeme druhý tvar zobrazovací rovnice.

$$f_2=\frac{nR}{1-n}=279\ \text{mm}\,,\qquad f_2'=\frac{R}{1-n}=179\ \text{mm}\,,$$

$$a_2'=\frac{a_2f_2'}{a_2-f_2}=-113\ \text{mm}\,,\qquad \beta_2=-\frac{f_2}{a_2-f_2}=1{,}63\,.$$

Obraz leží v předmětovém poloprostoru ve vzdálenosti 113 mm od kulového rozhraní a má příčné zvětšení $\beta=\beta_1\beta_2=1{,}63$.

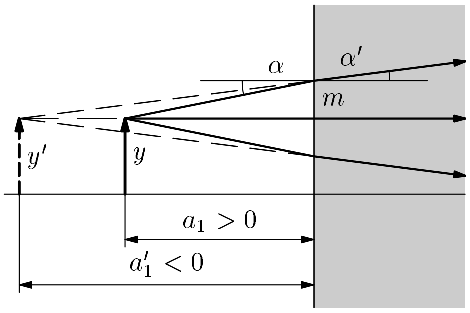
5 bodů

Jiné řešení zobrazení na rovinném rozhraní vychází z obr. R3:

Pro malé úhly platí

$$n=\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}\approx\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha'}=\frac{\dfrac{m}{a_1}}{\dfrac{m}{-a_1'}}=-\frac{a_1'}{a_1},$$

$$a_1'=-na_1\,,\qquad \beta_1=\frac{y'}{y}=1\,.$$



Obr. R3

Řešení pomocí hlavních rovin a ohniskové vzdálenosti tlusté čočky (obr. R4) – viz studijní text *Zobrazení čočkami*

Parametry čočky: $R_1 \to \infty$, $R_2 = -100$ mm, $d = 30$ mm, $n_1 \doteq 1$ (okolní vzduch), $n_2 = n = 1{,}56$ (sklo)

Obecný vztah pro ohniskovou vzdálenost tlusté čočky

$$f = \frac{n_1 n_2 R_1 R_2}{(n_2 - n_1)[(n_2 - n_1)d + n_2(R_2 - R_1)]} = \frac{n R_1 R_2}{(n-1)[(n-1)d + n(R_2 - R_1)]}$$

upravíme na tvar $f = \dfrac{n R_2}{(n-1)\left[(n-1)\dfrac{d}{R_1} + n\left(\dfrac{R_2}{R_1} - 1\right)\right]}$.

Podobně musíme upravit vztah pro výpočet polohy hlavního bodu H:

$$a_1(H) = \frac{n_1 R_1 d}{(n_2 - n_1)d + n_2(R_2 - R_1)} = \frac{R_1 d}{(n-1)d + n(R_2 - R_1)} = \frac{d}{(n-1)\dfrac{d}{R_1} + n\left(\dfrac{R_2}{R_1} - 1\right)}\,.$$

Protože $R_1 \to \infty$ dostáváme

$$f = -\frac{R_2}{n-1} = 179\ \text{mm}\,, \qquad a_1(H) = -\frac{d}{n} = -19{,}2\ \text{mm}\,,$$

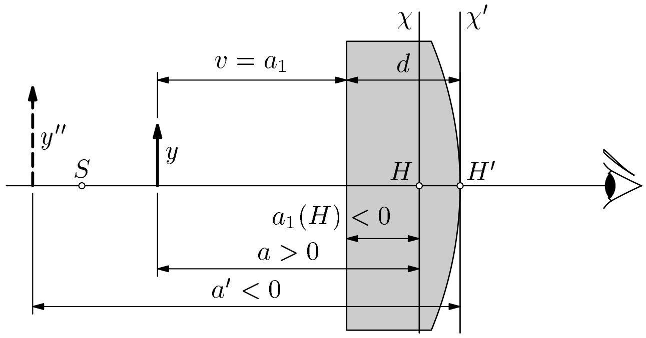
$$a_2'(H') = -\frac{n_1 d R_2}{(n_2 - n_1)d + n_2(R_2 - R_1)} = 0\,.$$

6 bodů

Pozorovaný předmět má předmětovou vzdálenost $a = a_1 - a_1(H) = 69{,}2$ mm.

Obrazová vzdálenost je $a' = \dfrac{af}{a-f} = -113$ mm $= a_2'$, obraz leží v předmětovém poloprostoru ve vzdálenosti 113 mm od kulového rozhraní a má příčné zvětšení $\beta = -\dfrac{f}{a-f} = 1{,}63$.

4 body



Obr. R4