Řešení úloh regionálního kola 47. ročníku fyzikální olympiády.

Kategorie B

Autoři úloh: M. Jarešová (1, 2, 3) M. Cvrček a P. Šedivý (4)

1. a) Pro pohyb úlomků platí zákon zachování hybnosti:

$$m\boldsymbol{v}_{01} + m\boldsymbol{v}_{02} + m\boldsymbol{v}_{03} = \boldsymbol{0}.$$

Protože všechny úlomky mají stejnou hmotnost, lze psát:

$$\boldsymbol{v}_{01} + \boldsymbol{v}_{02} + \boldsymbol{v}_{03} = \boldsymbol{0}.$$

Protože platí $|\boldsymbol{v}_{01}| = |\boldsymbol{v}_{02}| = |\boldsymbol{v}_{03}| = v_0$ svírají vektory rychlostí $\boldsymbol{v}_{01}$, $\boldsymbol{v}_{02}$, $\boldsymbol{v}_{03}$ mezi sebou úhly 120° (obr. 1), a proto $\alpha = 30°$.

Po rozepsání do složek dostaneme:

$v_{01x} = 0$; $\quad v_{02x} = v_0 \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}v_0$; $\quad v_{03x} = -v_0 \cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}v_0$;

$v_{01y} = -v_0$; $\quad v_{02y} = v_0 \sin 30° = \frac{v_0}{2}$; $\quad v_{03y} = v_0 \sin 30° = \frac{v_0}{2}$.

Pohyb úlomků je pak možno popsat pomocí rovnic:

$$1\colon\ y_1 = H - v_0 t - \frac{1}{2}gt^2,$$

$$2{,}3\colon\ y_{2,3} = H + \frac{v_0}{2}t - \frac{1}{2}gt^2.$$

V okamžiku dopadu 1. úlomku je $y_1 = 0$, v okamžiku dopadu 2. a 3. úlomku je $y_{2,3} = 0$. Pak můžeme psát

$$0 = H - v_0 T_1 - \frac{1}{2}gT_1^2, \tag{1}$$

$$0 = H + \frac{v_0}{2}T_2 - \frac{1}{2}gT_2^2. \tag{2}$$

Z rovnice (1) vyjádříme v_0 a dosadíme do rovnice (2). Dostaneme

$$v_0 = \frac{H - \frac{1}{2}gT_1^2}{T_1},$$

$$H = \frac{gT_1T_2}{2} \cdot \frac{2T_2 + T_1}{2T_1 + T_2}. \tag{3}$$

3 body

b) Od rovnice (2) odečteme rovnici (1). Dostaneme

$$v_0\left(T_1 + \frac{T_2}{2}\right) + \frac{1}{2}gT_1^2 - \frac{1}{2}gT_2^2 = 0,$$

z čehož

$$v_0 = \frac{T_2^2 - T_1^2}{2T_1 + T_2} g \tag{4}$$

2 body

c) Úlohu vyřešíme užitím zákona zachování mechanické energie. Pro každý úlomek platí

$mgH + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_i^2$, kde $i = 1, 2, 3$ je index pro každý úlomek.

Potom $v_i = \sqrt{v_0^2 + 2Hg}$.
Všechny tři úlomky dopadnou na zem stejně velkou rychlostí.

2 body

d) Představme si, že v okamžiku exploze začne z místa exploze padat volným pádem kulička. Pokud bychom začali popisovat pohyb úlomků vzhledem k neinerciální soustavě souřadnic spojené s kuličkou, můžeme říci, že se všechny úlomky od této kuličky vzdalují stejně velkou rychlostí v_0 danou vztahem (4) a tudíž můžeme říci, že všechny úlomky leží v časovém intervalu $(0; T_1\rangle$ na kružnici se středem ve středu uvažované kuličky padající volným pádem, pro jejíž pohyb platí

$$y = H - \frac{1}{2}gt^2,$$

poloměr kružnice je pak $r = v_0 t$.

3 body

Poznámka

Úlohu d) lze řešit i analyticky. Obecně lze psát pro všechny tři úlomky (α je úhel měřený od osy x)

$$x = v_0 \cos \alpha t, \tag{5}$$

$$y = H + v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2}gt^2. \tag{6}$$

Z rovnice (5) $\cos \alpha = \frac{x}{v_0 t}$, z rovnice (6) $\sin \alpha = \frac{y + \frac{1}{2}gt^2 - H}{v_0 t}$.
Dále užitím vztahu $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ dostaneme

$$\frac{x^2}{v_0^2 t^2} + \frac{\left(y + \frac{1}{2}gt^2 - H\right)^2}{v_0^2 t^2} = 1,$$

$$x^2 + \left(y + \frac{1}{2}gt^2 - H\right)^2 = (v_0 t)^2,$$

což je rovnice kružnice se středem $\left(0; H - \frac{1}{2}gt^2\right)$ a poloměrem $r = v_0 t$.

2. a) Největší možné zkrácení pružin je $\Delta l_{\max} = l_0 - l_{\min} = 0{,}15$ m. Prostřední pružina určitě nemůže být zatížena pokud $h \geq \Delta l_{\max}$. V opačném případě musí platit

$$mg \leq 2kh, \quad \text{z čehož} \quad h \geq \frac{mg}{2k}\,. \tag{1}$$

2 body

b) Nejprve vyšetříme, zda jsou zatíženy jen dvě krajní pružiny, nebo všechny tři pružiny. Určíme zkrácení obou krajních pružin pro dané hodnoty (pro případ bez prostřední pružiny). Dostaneme

$$\Delta l' = \frac{10 \cdot 9{,}81}{2 \cdot 1{,}0 \cdot 10^3}\ \mathrm{m} = 0{,}049\ \mathrm{m}, \quad \Delta l' > h.$$

Z toho vyplývá, že budou zatíženy všechny tři pružiny.

1 bod

Pak platí $mg = 2k\Delta l_1 + k(\Delta l_1 - h)$, z čehož $\Delta l_1 = \dfrac{mg + kh}{3k}$.

Pro dané hodnoty $\Delta l_1 = 0{,}043$ m.

3 body

c) Nejprve určíme užitím zákona zachování mechanické energie rychlost bloku v okamžiku dopadu na horní konce krajních pružin. Dostaneme

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgH, \quad \text{z čehož} \quad v = \sqrt{2Hg}.$$

Dále můžeme opět použít zákon zachování mechanické energie pro celou soustavu. Ve výšce l_0 nad povrchem je

$$E_{\mathrm{k}2} = \frac{1}{2}mv^2 = mgH, \quad E_{\mathrm{p}2} = 0.$$

V dolní poloze, pokud nedojde k zastavení bloku úplným stlačením krajních pružin „nadoraz“, je

$$E_{\mathrm{k}3} = 0, \quad E_{\mathrm{p}3} = 2 \cdot \frac{1}{2}k(\Delta l_2)^2 + \frac{1}{2}k(\Delta l_2 - h)^2 - mg\Delta l_2.$$

Napíšeme zákon zachování mechanické energie pro tyto dvě polohy:

$$mgH = k(\Delta l_2)^2 + \frac{1}{2}k(\Delta l_2 - h)^2 - mg\Delta l_2.$$

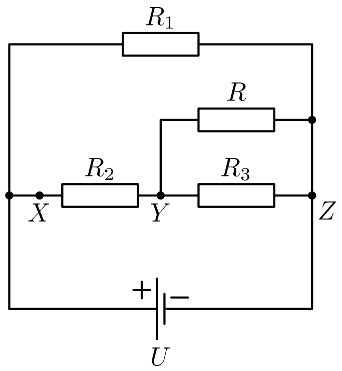
Řešením této kvadratické rovnice dostaneme

$$\Delta l_2 = \frac{1}{3k}\left[kh + mg \pm \sqrt{2mgkh + 6mgkH - 2k^2h^2 + m^2g^2}\right].$$

Pro dané hodnoty: $\Delta l_2 = \dfrac{1}{3000}(128 \pm 268)$ m, význam má pouze kladné řešení, tedy $\Delta l_2 = 0{,}132\ \mathrm{m} < \Delta l_{\max}$.

4 body

3.a) Je-li klíč K zapnut, je možno obvod překreslit tak, jak je znázorněno na obr. R1.



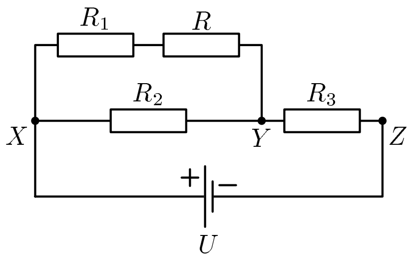
Obr. R1

Velikost odporu mezi body Y, Z je dána vztahem:
$$R_{YZ} = \frac{RR_3}{R+R_3}.$$
Velikost odporu mezi body XZ je dána vztahem:
$$R_{XZ} = R_2 + R_{YZ} = R_2 + \frac{RR_3}{R+R_3},$$
$$R_{XZ} = \frac{(R_2+R_3)R + R_2R_3}{R+R_3}.$$

Pro poměr napětí pak platí:
$$\frac{U_\mathrm{S}}{U} = \frac{U_{YZ}}{U_{XZ}} = \frac{R_{YZ}}{R_{XZ}} = \frac{\frac{RR_3}{R+R_3}}{\frac{(R_2+R_3)R+R_2R_3}{R+R_3}} = \frac{RR_3}{(R_2+R_3)R+R_2R_3}.$$
Napětí na spotřebiči je pak dáno vztahem
$$U_\mathrm{S} = \frac{RR_3}{(R_2+R_3)R+R_2R_3}U.$$
Pro dané hodnoty:
$$U_\mathrm{S} = \frac{90\{R\}}{270\{R\}+180\cdot 90}U = \frac{\{R\}}{3(\{R\}+60)}U. \tag{1}$$

3 body

b) Je-li klíč K vypnut, můžeme schéma z obr. 5 překreslit tak, jak je znázorněno na obr. R2. Pak můžeme psát
$$R_{XY} = \frac{(R_1+R)R_2}{R_1+R_2+R},$$
$$R_{XZ} = R_{XY} + R_3 = \frac{(R_1+R)R_2}{R_1+R_2+R} + R_3.$$



Obr. R2

$$R_{XZ} = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3 + (R_2+R_3)R}{R_1+R_2+R}.$$

Pro poměr napětí pak platí

$$\frac{U_{XY}}{U} = \frac{U_{XY}}{U_{XZ}} = \frac{R_{XY}}{R_{XZ}} = \frac{R_1R_2 + RR_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3 + (R_2 + R_3)R},$$

z čehož

$$U_{XY} = \frac{R_1R_2 + RR_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3 + (R_2 + R_3)R}U.$$

Dále pak můžeme psát

$$\frac{U'_{\mathrm{S}}}{U_{XY}} = \frac{R}{R_1 + R}.$$

$$U'_{\mathrm{S}} = \frac{R}{R_1 + R}U_{XY} = \frac{R}{R_1 + R}\frac{(R_1 + R)R_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3 + (R_2 + R_3)R}U,$$

$$U'_{\mathrm{S}} = \frac{RR_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3 + (R_2 + R_3)R}U.$$

Pro dané hodnoty:

$$U'_{\mathrm{S}} = \frac{2\{R\}}{3(150 + \{R\})}U. \qquad (2)$$

4 body

c) Dle zadání má platit

$$U_{\mathrm{S}} = U'_{\mathrm{S}}.$$

Po dosazení vztahů (1) a (2) do výše uvedeného vztahu dostaneme

$$\frac{\{R\}}{3(\{R\} + 60)}U = \frac{2\{R\}}{3(150 + \{R\})}U,$$

po úpravě

$$150 + \{R\} = 2(\{R\} + 60),$$

z čehož $R = 30\ \Omega$.

Po dosazení do vztahu (1) nebo (2) dostaneme $U_{\mathrm{S}} = U'_{\mathrm{S}} = 6\ \mathrm{V}$.

3 body

4. a) Rychlost vody při výstupu z trysky určíme pomocí Torricelliho vzorce:

$$v = \sqrt{2gh_{\mathrm{e}}} = \sqrt{2gkh} = 74{,}4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}\,.$$

Objemový průtok je

$$Q_V = Sv = \frac{\pi d^2 v}{4} = 0{,}286\ \mathrm{m^3 \cdot s^{-1}}\,.$$

3 body

b) Účinnost turbíny bude největší, jestliže voda při styku s lopatkami ztratí veškerou kinetickou energii a bude je opouštět s nulovou rychlostí vzhledem k zemi. Dopadá-li voda rychlostí $\boldsymbol{v}$ na lopatku, která se pohybuje rychlostí $\boldsymbol{u}$, je relativní rychlost vody vzhledem k lopatce $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$. Na lopatce se relativní rychlost vody změní na opačnou $-(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})$. Rychlost vody opouštějící lopatku vzhledem k zemi je $\boldsymbol{u} + [-(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u})] = 2\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$. Má-li být nulová, musí platit

$$u = \frac{v}{2}\,.$$

Středy lopatek musejí obíhat po kružnici o poloměru

$$R = \frac{u}{2\pi f} = \frac{v}{4\pi f} = \frac{\sqrt{2gkh}}{4\pi f} = 0{,}59\ \mathrm{m}\,.$$

4 body

c) Výkon turboalternátoru je roven součinu kinetické energie vody, která dopadne na turbínu za 1 sekundu, násobené účinností turboalternátoru.

$$P = \eta \cdot \frac{1}{2} Q_m v^2 = \frac{\eta \varrho \pi d^2 v^3}{8} = \frac{\eta \varrho \pi d^2 \left(\sqrt{2gkh}\right)^3}{8} = 630\ \mathrm{kW}\,.$$

3 body