Řešení úloh 1. kola 46. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie D*

Autoři úloh: J. Jírů (2, 4, 5, 6), I. Volf (1, 7), Ľ. Konrád (3)

1. Z rovnic $v = at$, $s = \frac{1}{2}at^2$ pro rovnoměrně zrychlený pohyb z klidu nebo rovnoměrně zpomalený pohyb do zastavení plynou vztahy, které postupně použijeme:

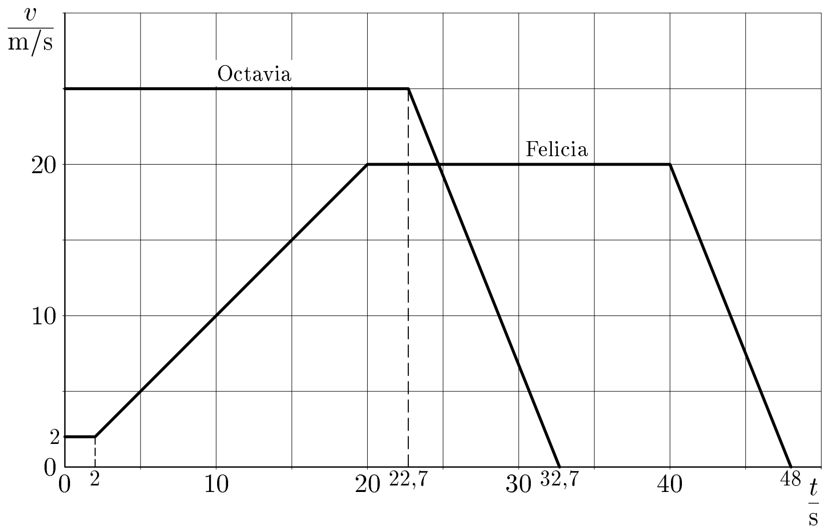
$$t = \frac{2s}{v}\,, \qquad a = \frac{2s}{t^2}\,, \qquad s = \frac{v^2}{2a}\,. \qquad (1)(2)(3)$$

a) K sestrojení grafu (obr. R1) zbývá určit dobu brzdění Felicie. Označíme-li

$$v = 72\ \mathrm{km\cdot h^{-1}} = 20\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}, \quad s = 90\ \mathrm{m} - 10\ \mathrm{m} = 80\ \mathrm{m},$$

z rovnice (1) dostaneme $t = 8$ s.

3 body



Obr. R1

b) Dráha uražená Felicií je určená obsahem plochy pod grafem

$$(4 + 198 + 400 + 80)\ \mathrm{m} = 682\ \mathrm{m}\,.$$

Průměrná rychlost Felicie je podíl uražené dráhy 682 m a odpovídajícího času 48 s

$$v_\mathrm{p} = 14{,}2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 51{,}1\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}\,.$$

2 body

c) Označme $s = 80$ m brzdnou dráhu Felicie, $t = 8$ s dobu brzdění Felicie a $v = 90\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} = 25\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ rychlost rovnoměrného pohybu Octavie. Z rovnice (2) dostaneme zrychlení obou automobilů při brzdění $a = 2{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Brzdná dráha Octavie pak podle rovnice (3) je 125 m. Dráha rovnoměrného pohybu Octavie je 682 m + 10 m − 125 m = 567 m. Doba rovnoměrného pohybu Octavie je 22,7 s (podíl příslušné dráhy a rychlosti), doba zpomalování je užitím rovnice (1) rovna 10 s. Oba získané časy užijeme k sestrojení grafu.

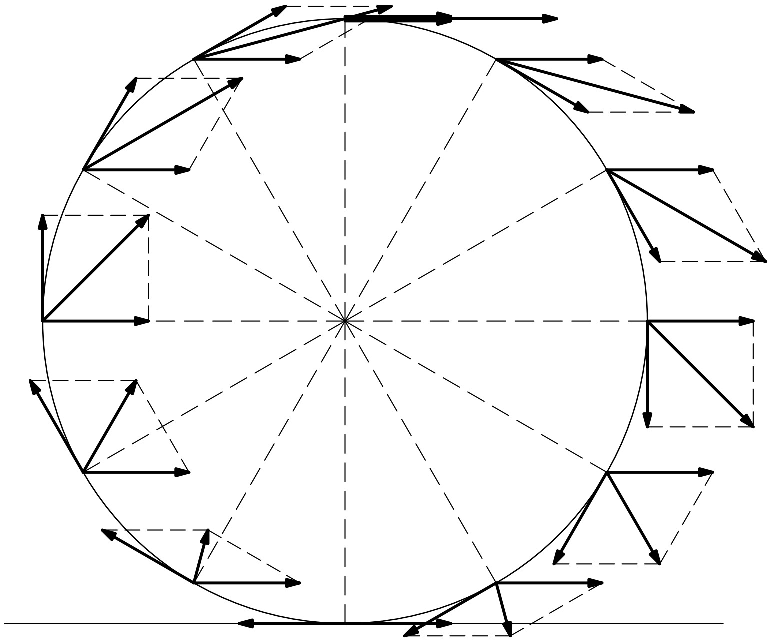
3 body

d) Do času 24,7 s, kdy se grafy protínají, se vozidla vzájemně vzdalovala, po tomto čase do zastavení Felicie se vzájemné přibližovala. Proto v uvedeném čase byla vzdálenost mezi vozidly maximální. Tato vzdálenost je určena rozdílem obsahů ploch pod grafem na časovém intervalu 0 až 24,7 s, tedy

$$(567\ \mathrm{m} + 45\ \mathrm{m}) - (4\ \mathrm{m} + 198\ \mathrm{m} + 94\ \mathrm{m}) = 316\ \mathrm{m}.$$

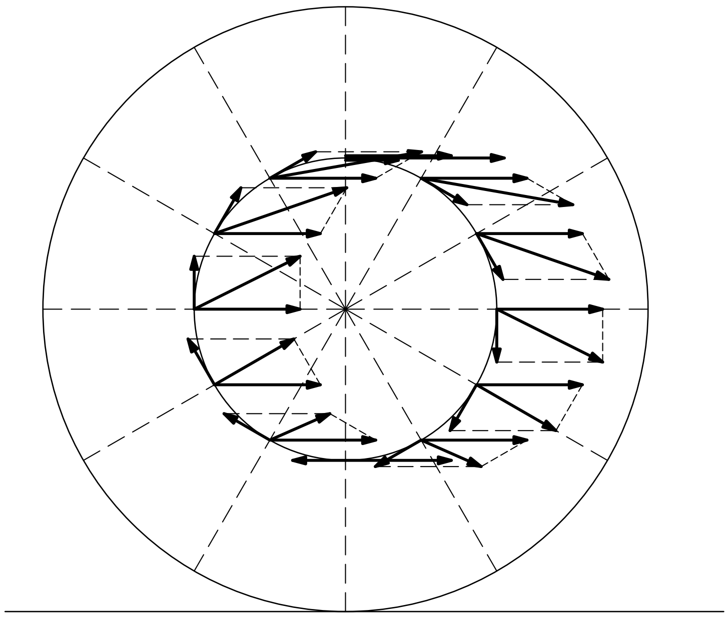
2 body

2. a)



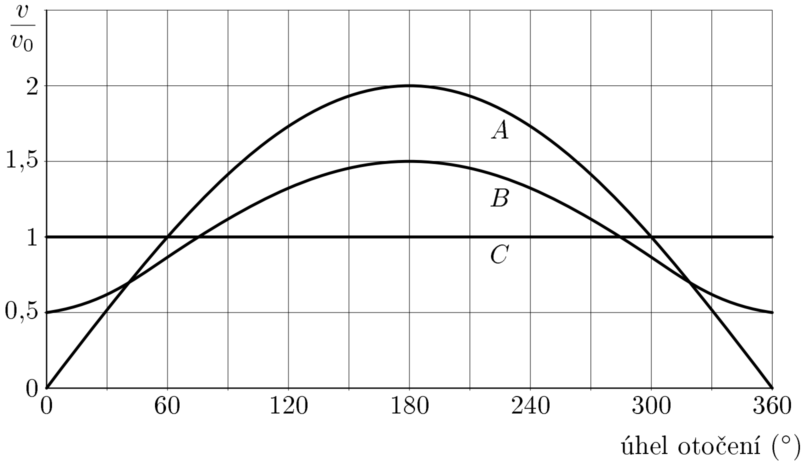
3 body

b)



3 body

c)



Průběh grafů je popsán funkcemi

$$\frac{v}{v_0} = 2\sin\frac{\varphi}{2} \quad \text{pro bod } A\,, \qquad \frac{v}{v_0} = \sqrt{1{,}25 - \cos\varphi} \quad \text{pro bod } B\,.$$

4 body

3. Těleso 1 působí na vlákno největší silou při průchodu rovnovážnou polohou. Velikost této síly je

$$F_{\mathrm{m}} = m_1 g + \frac{m_1 v_{\mathrm{m}}^2}{l}\,, \tag{1}$$

kde v_{m} je velikost okamžité rychlosti v této poloze. **2 body**

Při vychýlení o úhel α $(0 < \alpha \leq 90°)$ platí

$$\cos\alpha = \frac{l-h}{l} \qquad \Rightarrow \qquad h = l(1-\cos\alpha)\,,$$

kde h je výška tělesa 1 nad rovnovážnou polohou. Ze zákona zachování mechanické energie plyne

$$\frac{1}{2} m_1 v_{\mathrm{m}}^2 = m_1 g l (1-\cos\alpha) \qquad \Rightarrow \qquad v_{\mathrm{m}}^2 = 2gl(1-\cos\alpha)\,.$$

Dosazením do (1) dostaneme

$$F_{\mathrm{m}} = m_1 g (3 - 2\cos\alpha)\,.$$

2 body

Těleso 2 se během děje uvede do pohybu za podmínky $F_{\mathrm{m}} > m_2 g$, z níž plyne

$$\cos\alpha < \frac{3m_1 - m_2}{2m_1}\,. \tag{2}$$

Jelikož $0 \leq \cos\alpha$, musí platit

$$0 < \frac{3m_1 - m_2}{2m_1} \qquad \Rightarrow \qquad m_1 > \frac{m_2}{3}\,.$$

Nerovnost může být tedy splněna jen za podmínky $m_1 > m_2/3$. Naopak za podmínky $m_1 \leq m_3/3$ k pohybu tělesa 2 nedojde ani při maximální výchylce 90°. **4 body**

Pro $m_1 = 2{,}0$ kg, $m_2 = 3{,}0$ kg se těleso 2 začne pohybovat, pokud $\alpha > 41°$. Pro $m_1 = 2{,}0$ kg, $m_2 = 7{,}0$ kg se těleso 2 neuvede do pohybu při žádné hodnotě úhlu α. **2 body**

4.a) Souprava o hmotnosti $m_1 + m_2$ je brzděna třecí silou o velikosti $F_\mathrm{t} = fm_2g$. Z druhého Newtonova pohybového zákona plyne

$$a = \frac{fm_2g}{m_1 + m_2} = 0{,}37\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}\,.$$

2 body

b) Označme v velikost okamžité rychlosti soupravy těsně po srážce. Ze zákona zachování hybnosti $m_1v_0 = (m_1 + m_2)v$ plyne

$$v = \frac{m_1}{m_1 + m_2}v_0\,. \tag{1}$$

Kinetická energie soupravy bezprostředně po srážce je rovna práci spotřebované na překonání třecí síly:

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = W = F_\mathrm{t}s = fm_2gs\,.$$

S užitím rovnice (1) dostaneme

$$s = \frac{m_1^2v_0^2}{2fm_2g(m_1 + m_2)}\,. \tag{2}$$

Číselně vychází $s = 7{,}2\ \mathrm{m}$. **4 body**

c) Záměnou hmotnosti vagonů dostaneme brzdnou dráhu

$$s' = \frac{m_2^2v_0^2}{2fm_1g(m_1 + m_2)}\,.$$

Hledaný poměr brzdných drah je

$$\frac{s'}{s} = \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^3 = 4{,}1\,.$$

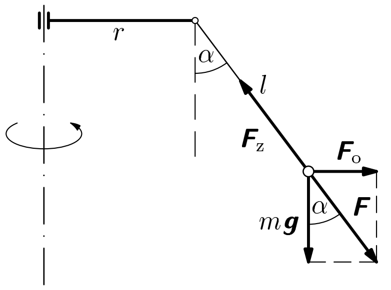
2 body

d) Z rovnice (2) položením $m_1 = m_2$ dostaneme

$$s'' = \frac{v_0^2}{4fg} = 15\ \mathrm{m}\,.$$

2 body

5. a) Z hlediska chlapce na sedačce, tedy v neinerciální vztažné soustavě spojené s kolotočem, je síla závěsu $\boldsymbol{F}_\mathrm{z}$ v rovnováze s výslednicí $\boldsymbol{F}$ tíhové síly $m\boldsymbol{g}$ a setrvačné odstředivé síly $\boldsymbol{F}_\mathrm{o}$ (obr. R2). Platí



$$\cos\alpha = \frac{mg}{F} = \frac{mg}{1{,}5mg} = \frac{2}{3}\,,$$

tedy $\alpha = 48°$.

Obr. R2

2 body

b) Pasažér se pohybuje po kružnici o poloměru $r + l\sin\alpha$ s dostředivým zrychlením

$$a_\mathrm{d} = g\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{v^2}{r + l\sin\alpha}\,.$$

Z toho plyne

$$v = \sqrt{g(r + l\sin\alpha)\,\mathrm{tg}\,\alpha}\,. \qquad (1)$$

Pro goniometrické funkce platí $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Po dosazení $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$ dostaneme

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \qquad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}\,. \qquad (2)$$

Z rovnic (1) a (2) nakonec plyne $v = \sqrt{\dfrac{\sqrt{5}}{2}g\left(r + \dfrac{\sqrt{5}}{3}l\right)} = 8{,}1\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

5 bodů

c) Z rovnice (1) a z rovnice $v = 2\pi f(r + l\sin\alpha)$ plyne

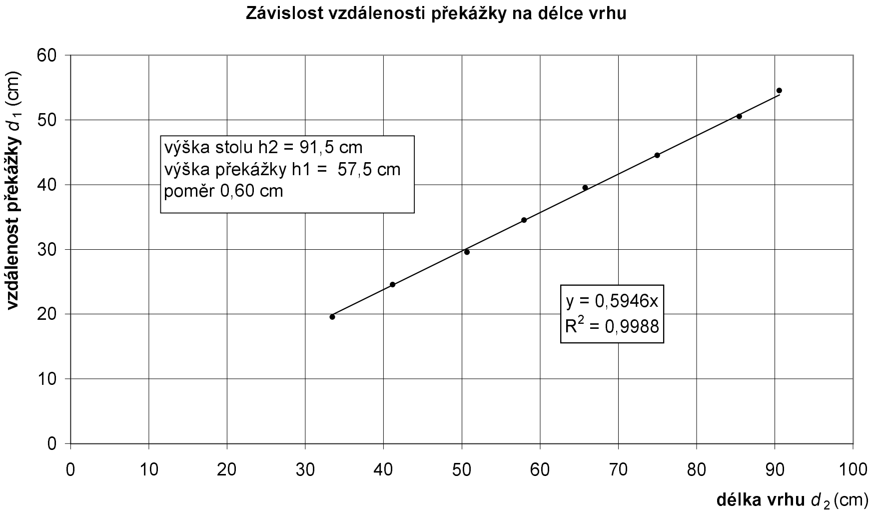
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g\,\mathrm{tg}\,\alpha}{r + l\sin\alpha}}\,.$$

Po dosazení z (2) dostaneme $f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{\frac{\sqrt{5}}{2}g}{r + \frac{\sqrt{5}}{3}l}} = 0{,}21\ \mathrm{Hz}$, tj. $T = 4{,}7$ s.

3 body

6. Hodnocení úlohy:

a) Provedení měření a sestrojení grafu. Ukázka grafu pro konkrétní měření je na obr. R3. **6 bodů**



Obr. R3

b) Určení směrnice. **1 bod**

c) Určení hodnoty výrazu a porovnání. **1 bod**

d) Zvolíme-li počátek vztažné soustavy v místě, kde kulička opouští desku, osu x ve směru počáteční rychlosti vrhu a svislou osu směrem dolů, platí pro souřadnice x, y vrhu v závislosti na čase rovnice

$$x = v_0 t\,, \qquad y = \frac{1}{2} g t^2\,.$$

Vyloučením času t získáme rovnici trajektorie $y = \dfrac{g}{2v_0^2} x^2\,.$

Dosazením souřadnic příslušných poloh kuličky při daném letu dostaneme rovnice

$$h_2 - h_1 = \frac{g}{2v_0^2} d_1^2\,, \qquad h_2 = \frac{g}{2v_0^2} d_2^2\,.$$

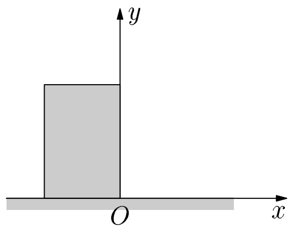
Z jejich podílu plyne dokazovaná rovnost

$$\sqrt{\frac{h_2 - h_1}{h_2}} = \frac{d_1}{d_2}\,.$$

2 body

7.

Zvolme soustavu souřadnic podle obr. R4:



a) V rovnici $y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 + h_0$ pro svislý vrh vzhůru položíme $y = 0$, $t = t_1$. Dostaneme kvadratickou rovnici s neznámou t_1. Úloze vyhovuje kořen

$$t_1 = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}}{g} = 4{,}5\ \mathrm{s}\,.$$

U vodorovného vrhu je doba letu rovna době volného pádu z výšky h_0. Z rovnice $h_0 = \frac{1}{2}gt_2^2$ plyne $t_2 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} = 2{,}4$ s.

V rovnici $y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2 + h_0$ položíme $y = 0$, $t = t_3$. Dostaneme kvadratickou rovnici s neznámou t_3. Úloze vyhovuje kořen

$$t_3 = \frac{v_0 \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh_0}}{g} = 3{,}8\ \mathrm{s}\,.$$

4 body

b) Ze zákona zachování mechanické energie plyne

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh_0 = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_3^2\,.$$

Proto

$$v_1 = v_2 = v_3 = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0} = 28\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

2 body

c) Pro svislý vrh platí $d_1 = 0$.

Pro vodorovný vrh platí $d_2 = v_0 t_2 = v_0\sqrt{\frac{2h_0}{g}} = 38\ \mathrm{m}$.

Pro šikmý vrh platí

$$d_3 = v_0 t_3 \cos\alpha = v_0 \frac{v_0 \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh_0}}{g} \cos\alpha = 43\ \mathrm{m}\,.$$

4 body