Řešení úloh 1. kola 46. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie C*

Autoři úloh: J. Jírů (1), B. Vybíral (2), P. Šedivý (3, 5, 7), M. Medo (4) a I. Čáp (6)
Konečná úprava: P. Šedivý

1.a) Z kinematických zákonů vrhu

$$x = v_0 t \cos\alpha\,, \tag{1}$$

$$y = h_0 + v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 \tag{2}$$

dostaneme vyloučením počáteční rychlosti v_0 rovnici $y = h_0 + x \operatorname{tg}\alpha - \frac{1}{2} g t^2$. Dosadíme souřadnice místa dopadu koule $x = d$, $y = 0$ pro čas $t = t_1$ a tento hledaný čas t_1 vyjádříme:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2(h_0 + d \operatorname{tg}\alpha)}{g}} = 1{,}99\ \mathrm{s}\,.$$

3 body

b) Z časových rovnic vrhu (1), (2) dostaneme vyloučením času t rovnici trajektorie. Dosadíme souřadnice místa dopadu koule $x = d$, $y = 0$ a vyjádříme hledanou počáteční rychlost

$$v_0 = \frac{d}{\cos\alpha} \sqrt{\frac{g}{2(h_0 + d \operatorname{tg}\alpha)}}\,. \tag{3}$$

Číselně $v_0 = 13{,}3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

3 body

c) Svislá složka rychlosti koule je $v_y = v_0 \sin\alpha - gt$. Označme t_2 čas, v němž dosáhne koule maximální výšky, tehdy platí $v_y = 0$. Z toho $t_2 = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}$. V rovnici (2) položíme $y = h_{\max}$, $t = t_2$ a dostaneme hledanou maximální výšku

$$h_{\max} = h_0 + \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}\,.$$

Po dosazení z rovnice (3) nakonec dostaneme

$$h_{\max} = h_0 + \frac{d^2 \operatorname{tg}^2\alpha}{4(h_0 + d \operatorname{tg}\alpha)} = 5{,}98\ \mathrm{m}\,.$$

4 body

2.a) Pro tíhu tělesa na vzduchu a ponořeného do vody platí

$$G_1 = mg = \varrho_\mathrm{b} V g\,, \qquad G_2 = G_1 - F_\mathrm{vz} = (\varrho_\mathrm{b} - \varrho_\mathrm{v}) V g\,,$$

kde m je hmotnost tělesa a V jeho objem. Vydělením obou rovnic dostaneme

$$\frac{\varrho_\mathrm{b} - \varrho_\mathrm{v}}{\varrho_\mathrm{b}} = \frac{G_2}{G_1} \quad \Rightarrow \quad \varrho_\mathrm{b} = \varrho_\mathrm{v} \frac{G_1}{G_1 - G_2} = 8{,}63 \cdot 10^3 \ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}\,.$$

4 body

b) Označíme-li m_1 hmotnost mědi a m_2 hmotnost cínu v tělese, platí

$$m = m_1 + m_2 \quad \Rightarrow \quad \delta_1 + \delta_2 = \frac{m_1}{m} + \frac{m_2}{m} = 1\,.$$

Pro objem tělesa platí

$$V = \frac{m}{\varrho_\mathrm{b}} = V_1 + V_2 = \frac{m_1}{\varrho_1} + \frac{m_2}{\varrho_2} = m \left(\frac{\delta_1}{\varrho_1} + \frac{\delta_2}{\varrho_2} \right)\,,$$

neboli

$$\frac{V}{m} = \frac{1}{\varrho_\mathrm{b}} = \frac{\delta_1}{\varrho_1} + \frac{\delta_2}{\varrho_2} = \frac{\delta_1}{\varrho_1} + \frac{1 - \delta_1}{\varrho_2}\,,$$

$$\delta_1 (\varrho_1 - \varrho_2) \varrho_\mathrm{b} = \varrho_1 (\varrho_\mathrm{b} - \varrho_2)\,.$$

Hmotnostní podíl mědi pak je

$$\delta_1 = \frac{\varrho_1}{\varrho_1 - \varrho_2} \left(1 - \frac{\varrho_2}{\varrho_\mathrm{b}} \right) = \frac{\varrho_1}{\varrho_1 - \varrho_2} \left[1 - \frac{\varrho_2}{\varrho_\mathrm{v}} \left(1 - \frac{G_2}{G_1} \right) \right] = 0{,}847\,.$$

Hmotnostní podíl cínu je

$$\delta_2 = 1 - \delta_1 = 0{,}153\,.$$

6 bodů

3. Na těleso působí tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$ a síla vlákna $\boldsymbol{F}_\mathrm{v}$. Jejich výslednice $\boldsymbol{F}$ uděluje tělesu zrychlení $\boldsymbol{a}$. Všechny tři vyšetřované polohy tělesa jsou znázorněny na obr. R1.

a) V krajní poloze je rychlost tělesa nulová. Tahová složka $\boldsymbol{F}_2$ tíhové síly se ruší se silou vlákna $\boldsymbol{F}_\mathrm{v}$. Výslednice $\boldsymbol{F}$ je totožná s tečnou složkou $\boldsymbol{F}_1$ tíhové síly. Platí

$$F = F_1 = mg\sin\alpha_\mathrm{m} = 0{,}85\ \mathrm{N}\,, \qquad F_\mathrm{v} = mg\cos\alpha_\mathrm{m} = 0{,}49\ \mathrm{N}\,,$$

$$a = \frac{F}{m} = g\sin\alpha = 8{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}\,.$$

2 body

b) Velikost v_m rychlosti tělesa při průchodu rovnovážnou polohou určíme ze zákona zachování energie:

$$mgh_\mathrm{m} = \frac{1}{2}mv_\mathrm{m}^2 \quad \Rightarrow \quad v_\mathrm{m} = \sqrt{2gh_\mathrm{m}} = \sqrt{2gl(1-\cos\alpha_\mathrm{m})} = 2{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

Výslednice $\boldsymbol{F}$ síly vlákna a síly tíhové působí ve směru závěsu, tj. kolmo ke směru okamžité rychlosti, a uděluje tělesu pouze normálové (dostředivé) zrychlení o velikosti

$$a_\mathrm{n} = \frac{v_\mathrm{m}^2}{l} = 2g(1-\cos\alpha_\mathrm{m}) = g = 9{,}81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}\,.$$

Platí tedy $F = F_\mathrm{v} - F_G = F_\mathrm{d} = \dfrac{mv_\mathrm{m}^2}{l} = mg = 0{,}981\ \mathrm{N}\,,$

$$F_\mathrm{v} = F + F_G = 2F_G = 1{,}962\ \mathrm{N}\,.$$

3 body

c) Velikost v rychlosti v okamžiku, kdy je vlákno odchýleno o úhel α, určíme opět ze zákona zachování energie:

$$mgh_\mathrm{m} - mgh = \frac{1}{2}mv^2\,,$$

$$v = \sqrt{2g(h_\mathrm{m}-h)} = \sqrt{2gl(\cos\alpha-\cos\alpha_\mathrm{m})} = 2{,}4\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

Výslednice síly vlákna $\boldsymbol{F}_\mathrm{v}$ a tahové složky $\boldsymbol{F}_2$ tíhové síly působí ve směru vlákna jako dostředivá síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{d}$ a uděluje tělesu normálové zrychlení $\boldsymbol{a}_\mathrm{n}$. Platí

$$a_\mathrm{n} = \frac{v^2}{l} = 2g(\cos\alpha-\cos\alpha_\mathrm{m}) = 7{,}18\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}\,,$$

$$F_\mathrm{v} = F_2 + F_\mathrm{d} = mg\cos\alpha + 2mg(\cos\alpha-\cos\alpha_\mathrm{m}) = 1{,}60mg = 1{,}57\ \mathrm{N}\,.$$

Pohybová složka $\boldsymbol{F}_1$ tíhové síly uděluje tělesu tečné zrychlení $\boldsymbol{a}_\mathrm{t}$ o velikosti

$$a_\mathrm{t} = \frac{F_1}{m} = g \sin\alpha = 4{,}9\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}\,.$$

Výsledná síla $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_\mathrm{d}$ má velikost

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_\mathrm{d}^2} = mg\sqrt{\sin^2\alpha + 4(\cos\alpha - \cos\alpha_\mathrm{m})^2} = 0{,}887mg = 0{,}870\ \mathrm{N}\,,$$

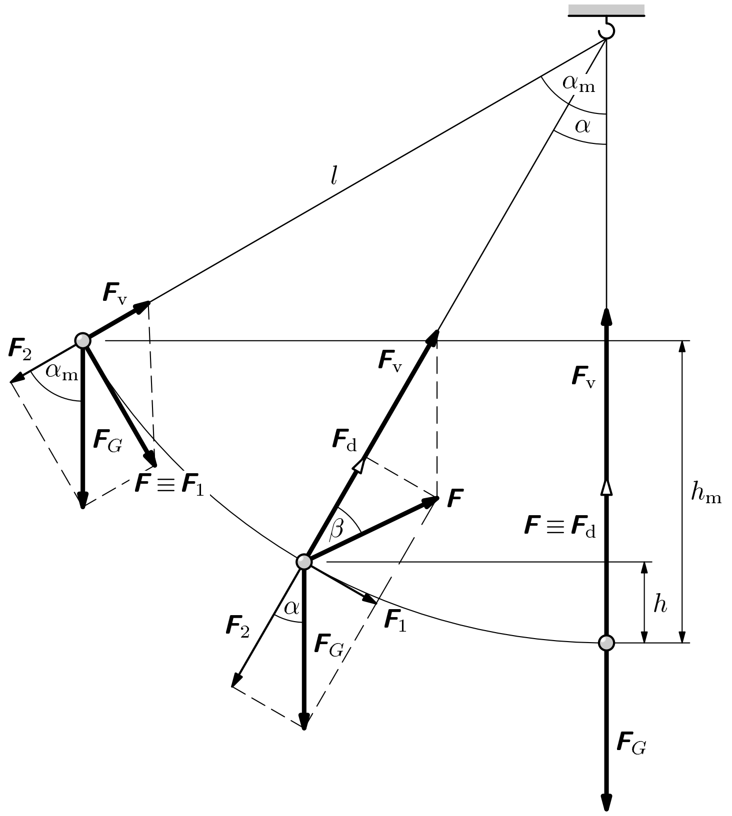
svírá s vláknem úhel β, pro který platí:

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{F_1}{F_\mathrm{d}} = \frac{\sin\alpha}{2(\cos\alpha - \cos\alpha_\mathrm{m})}\,, \qquad \beta = 34^\circ\,,$$

a uděluje tělesu celkové zrychlení téhož směru o velikosti

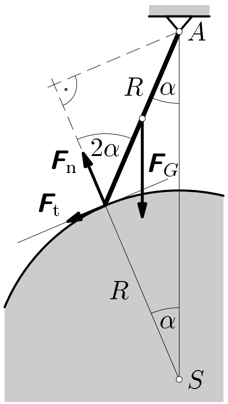
$$a = \frac{F}{m} = g\sqrt{\sin^2\alpha + 4(\cos\alpha - \cos\alpha_\mathrm{m})^2} = 0{,}887g = 8{,}7\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}\,.$$

5 bodů



Obr. R1

4.a) Vyjdeme z obr. R2. Označme $\boldsymbol{F}_\mathrm{t}$ tečnou složku a $\boldsymbol{F}_\mathrm{n}$ normálovou složku síly, kterou kotouč působí na tyč. Platí $F_\mathrm{t} = fF_\mathrm{n}$. Síly působící na tyč musí splňovat momentovou větu vzhledem k ose v bodě A:



Obr. R2

$$mg\frac{R}{2}\sin\alpha = F_\mathrm{n}R\sin 2\alpha + F_\mathrm{t}R\cos 2\alpha =$$

$$= \frac{F_\mathrm{t}}{f}R\sin 2\alpha + F_\mathrm{t}R\cos 2\alpha\,,$$

$$F_\mathrm{t} = \frac{mgf\sin\alpha}{2(\sin 2\alpha + f\cos 2\alpha)}\,.$$

2 body

Úhlové zrychlení kotouče během brzdění je namířeno proti okamžité úhlové rychlosti a má velikost

$$\varepsilon = \frac{F_\mathrm{t}R}{J} = \frac{F_\mathrm{t}R}{\frac{1}{2}MR^2} = \frac{mgf\sin\alpha}{MR(\sin 2\alpha + f\cos 2\alpha)}\,.$$

Brzdná doba $t_\mathrm{b} = \dfrac{\omega_0}{\varepsilon} = \dfrac{\omega_0 MR(\sin 2\alpha + f\cos 2\alpha)}{mgf\sin\alpha}$,

brzdná úhlová dráha $\varphi_\mathrm{b} = \dfrac{\omega_0 t_\mathrm{b}}{2} = \dfrac{\omega_0^2 MR(\sin 2\alpha + f\cos 2\alpha)}{2mgf\sin\alpha}$,

počet otáček do zastavení $N_\mathrm{b} = \dfrac{\varphi_\mathrm{b}}{2\pi} = \dfrac{\omega_0^2 MR(\sin 2\alpha + f\cos 2\alpha)}{4\pi mgf\sin\alpha}$.

4 body

b) Otáčí-li se kotouč opačným směrem, změní se orientace síly $\boldsymbol{F}_\mathrm{t}$ na opačnou. Ve všech vzorcích části a) se změní znaménko (+) na (−). Z toho vyplývá, že brzdění bude účinnější.

2 body

V tomto případě však existuje omezení. Pro $\mathrm{tg}\,2\alpha \leq f$ úloha nemá řešení. V případě rovnosti naroste síla tření do nekonečna, tyčka se zadře a zřejmě se něco zlomí.

2 body

5. a) Z rovnosti gravitační a dostředivé síly

$$\frac{\varkappa Mm}{(R+h)^2} = \frac{mv_1^2}{R+h} = m\frac{4\pi^2}{T_1^2}(R+h)$$

odvodíme: $v_1 = \sqrt{\dfrac{\varkappa M}{R+h}} = 7\,746\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$,

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{(R+h)^3}{\varkappa M}} = 5410\ \mathrm{s} = 90\ \mathrm{min}\ 10\ \mathrm{s}\,.$$

2 body

b) Podle 3. Keplerova zákona $\dfrac{a^3}{(R+h)^3} = \dfrac{T^2}{T_1^2}$. Z toho

$$a = (R+h)\left(\frac{T}{T_1}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{\varkappa MT^2}{4\pi^2}} = 26{,}65\cdot 10^6\ \mathrm{m}.$$

Trajektorie spojovací družice má excentricitu $e = a-(R+h) = 19{,}98\cdot 10^6$ m

a vedlejší poloosu $b = \sqrt{a^2-e^2} = 17{,}6\cdot 10^6$ m.

2 body

c) Plošnou rychlost spojovací družice dostaneme vydělením obsahu elipsy omezené trajektorií dobou oběhu

$$w = \frac{S}{T} = \frac{\pi ab}{T} = 3{,}42\cdot 10^{10}\ \mathrm{m^2\cdot s^{-1}}\,.$$

Platí $w = \dfrac{v_\mathrm{p}(a-e)}{2} = \dfrac{v_\mathrm{a}(a+e)}{2}$. Z toho

$$v_\mathrm{p} = \frac{2w}{a-e} = 10{,}2\cdot 10^3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,, \qquad v_\mathrm{a} = \frac{2w}{a+e} = 1463\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

Jiné řešení: Z 2. Keplerova zákona a zákona zachování energie dostaneme soustavu rovnic

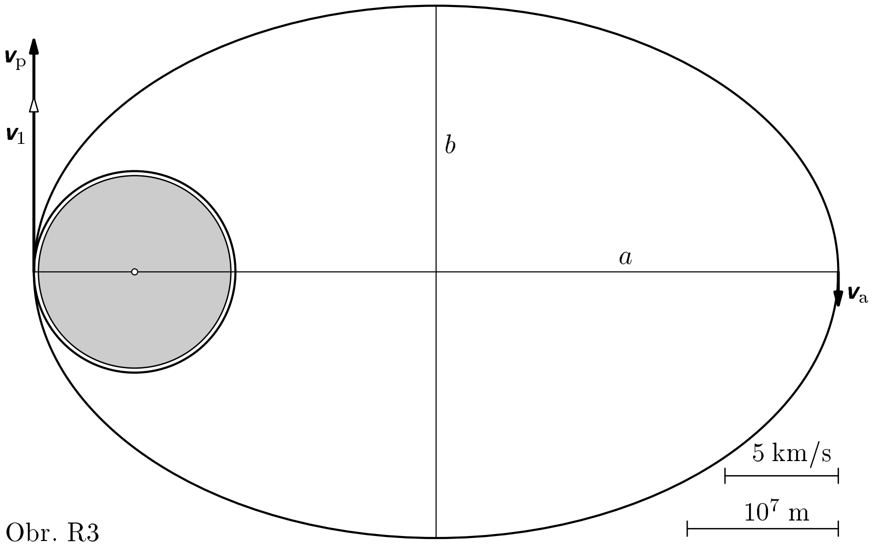
$$v_\mathrm{a}(a+e) = v_\mathrm{p}(a-e)\,, \qquad \frac{1}{2}mv_\mathrm{p}^2 - \frac{\varkappa Mm}{a-e} = \frac{1}{2}mv_\mathrm{a}^2 - \frac{\varkappa Mm}{a+e}\,.$$

Z toho

$$v_\mathrm{p} = \sqrt{\frac{\varkappa M}{a}\cdot\frac{a+e}{a-e}}\,, \qquad v_\mathrm{a} = \sqrt{\frac{\varkappa M}{a}\cdot\frac{a-e}{a+e}}\,.$$

3 body

d)



Obr. R3

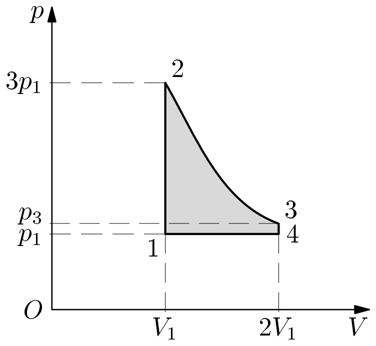
3 body

7.a) Látkové množství plynu určíme pomocí stavové rovnice:

$$p_1V_1 = nRT_1 \qquad \Rightarrow \qquad n = \frac{p_1V_1}{RT_1} = 0{,}040\ \mathrm{mol}\,.$$

1 bod

b,c)



Obr. R4

$$\begin{aligned}
p_2 &= 3p_1 = 3{,}00\cdot 10^5\ \mathrm{Pa},\\
V_2 &= V_1 = 1{,}00\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3,\\
T_2 &= \frac{p_2}{p_1}T_1 = 3T_1 = 900\ \mathrm{K},\\
p_3 &= p_2\left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\varkappa} = 3p_1\cdot 0{,}5^{1{,}4} =\\
&= 1{,}137p_1 = 1{,}137\cdot 10^5\ \mathrm{Pa},\\
V_3 &= V_4 = 2V_1 = 2{,}00\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3,\\
T_3 &= T_2\left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\varkappa-1} = 3T_1\cdot 0{,}5^{0{,}4} =\\
&= 2{,}274T_1 = 682\ \mathrm{K},\\
p_4 &= p_1 = 1{,}00\cdot 10^5\ \mathrm{Pa},\\
T_4 &= \frac{V_4}{V_1}T_1 = 2T_1 = 600\ \mathrm{K}.
\end{aligned}$$

3 body

d) Plyn přijal teplo při izochorickém ohřátí $1 \to 2$:

$$Q_{12} = nC_V(T_2 - T_1) = \frac{5}{2}nR\cdot 2T_1 = 5nRT_1 = 5p_1V_1 = 500\ \mathrm{J}\,.$$

Plyn odevzdal teplo při izochorickém ochlazení $3 \to 4$ a při izobarickém ochlazení $4 \to 1$:

$$Q'_{34} = nC_V(T_3 - T_4) = \frac{5}{2}nR\cdot 0{,}274T_1 = 0{,}684p_1V_1 = 68{,}4\ \mathrm{J}\,,$$

$$Q'_{41} = nC_p(T_4 - T_1) = \frac{7}{2}nRT_1 = 3{,}5p_1V_1 = 350\ \mathrm{J}\,.$$

Celkové odevzdané teplo je $Q'_{34} + Q'_{41} = 418{,}4$ J.

3 body

e) Celková práce plynu během jednoho cyklu je $W' = Q_{12} - Q'_{34} - Q'_{41} = 81{,}6$ J. Kruhový děj má účinnost $\eta = \dfrac{W'}{Q_{12}} = 16{,}3\ \%$.

3 body