Řešení praktické úlohy celostátního kola 46. ročníku FO

Teoretické úkoly

a) Pokud jsou k použitým zdířkám zapojeny vývody 1 a 3, bude se kondenzátor o kapacitě C_1 po připojení zdroje nabíjet přes rezistor o odporu R a jeho napětí by teprve po delší době dosáhlo napětí zdroje U_b. V okamžiku odpojení zdroje bude na něm napětí $U_1 < U_\mathrm{b}$ a kondenzátor se začne vybíjet přes sériově zapojený rezistor o odporu R a voltmetr o odporu R_v (obr. R1). Napětí na kondenzátoru a na voltmetru se bude zmenšovat podle vztahů

$$u_c = U_1\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_1}}\,, \quad u_\mathrm{v} = \frac{R_\mathrm{v}}{R+R_\mathrm{v}}U_1\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_1}} = U_0\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_1}}\,,$$

kde

$$\tau_1 = (R+R_\mathrm{v})C_1 \tag{1}$$

je časová konstanta obvodu. Podobně se bude obvod chovat i v případě, že ke zdířkám připojíme vývody 2 a 3. Časová konstanta obvodu se ale změní na

$$\tau_2 = (R+R_\mathrm{v})C_2\,. \tag{2}$$

Jestliže použijeme zdířky, ke kterým jsou připojeny vývody 1 a 2, nabije se sériová kombinace kondenzátorů o kapacitách C_1, C_2, která má výslednou kapacitu

$$C = \frac{1}{\dfrac{1}{C_1}+\dfrac{1}{C_2}} = \frac{C_1C_1}{C_1+C_2}$$

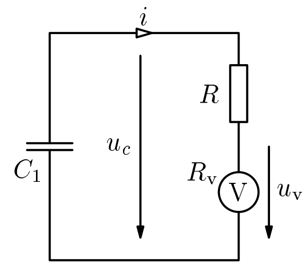
hned po připojení baterie tak, že celkové napětí bude rovno napětí baterie U_b. Po odpojení zdroje se bude soustava kondenzátorů vybíjet přes samotný voltmetr (obr. R2). Napětí bude klesat podle vztahu

$$u_c = u_\mathrm{v} = U_\mathrm{b}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_3}}$$

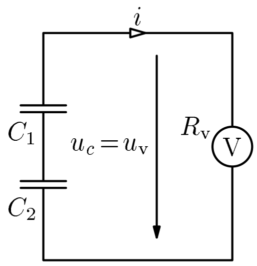
a časová konstanta obvodu bude

$$\tau_3 = R_\mathrm{v}C = \frac{R_\mathrm{v}}{\dfrac{1}{C_1}+\dfrac{1}{C_2}} = \frac{R_\mathrm{v}C_1C_2}{C_1+C_2}\,. \tag{3}$$

3 body



Obr. R1



Obr. R2

b) Ze vztahů (1), (2), (3) je zřejmé, že $\tau_3 < \tau_1 < \tau_2$, neboť $R_\mathrm{v} < R + R_\mathrm{v}$ a $C < C_1 < C_2$. Z toho je zřejmé, že kondenzátory jsou připojeny k těm dvěma zdířkám, pro které naměříme nejmenší časovou konstantu. Kondenzátor o kapacitě C_2 je zapojen k té z uvedených dvou zdířek, pro kterou ve spojení s třetí zdířkou naměříme největší časovou konstantu.

Použijeme-li zdířky, ke kterým jsou připojeny oba kondenzátory, napětí voltmetru se v okamžiku odpojení zdroje nezmění, pouze začne spojitě klesat z počáteční hodnoty U_b. Je-li jedna použitá zdířka spojena s rezistorem, napětí voltmetru v okamžiku odpojení zdroje poklesne skokem na nižší hodnotu a pak teprve bude spojitě klesat. **2 body**

c) Řešením soustavy rovnic (1), (2), (3) dostaneme

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{R_\mathrm{v} + R}{\tau_1} + \frac{R_\mathrm{v} + R}{\tau_2} = \frac{R_\mathrm{v}}{\tau_3}$$

$$R = R_\mathrm{v} \frac{\dfrac{1}{\tau_3} - \dfrac{1}{\tau_1} - \dfrac{1}{\tau_2}}{\dfrac{1}{\tau_1} + \dfrac{1}{\tau_2}} = R_\mathrm{v} \frac{\tau_1\tau_2 - \tau_2\tau_3 - \tau_1\tau_3}{\tau_2\tau_3 + \tau_1\tau_3}\,, \tag{4}$$

$$\frac{1}{C_1} = \frac{R_\mathrm{v}\left(1 + \dfrac{\dfrac{1}{\tau_3} - \dfrac{1}{\tau_1} - \dfrac{1}{\tau_2}}{\dfrac{1}{\tau_1} + \dfrac{1}{\tau_2}}\right)}{\tau_1} = R_\mathrm{v} \frac{\dfrac{1}{\tau_3}}{\tau_1\left(\dfrac{1}{\tau_1} + \dfrac{1}{\tau_2}\right)}\,,$$

$$C_1 = \frac{\tau_3\left(1 + \dfrac{\tau_1}{\tau_2}\right)}{R_\mathrm{v}}\,, \quad \text{obdobně} \quad C_2 = \frac{\tau_3\left(1 + \dfrac{\tau_2}{\tau_1}\right)}{R_\mathrm{v}}\,. \tag{5}$$

4 body

Praktické úkoly

d) Ukázka naměřených a vypočtených hodnot je v příloze. Mezní chyba naměřených časových konstant byla určena jako trojnásobek směrodatné odchylky aritmetického průměru, tj.

$$\varkappa_{\overline{x}} = \frac{3\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}$$

(viz *Svoboda, E. a kol.: Přehled středoškolské fyziky.*) Směrodatnou odchylku σ_{n-1} jednoho měření určíme snadno pomocí běžné kalkulačky vybavené pro statistické výpočty. V ukázce byly naměřeny časové konstanty

$\tau_1 = (28{,}76 \pm 0{,}21)$ s, $\quad \tau_2 = (42{,}78 \pm 0{,}22$ s) s, $\quad \tau_3 = (13{,}01 \pm 0{,}15$ s) s.

4 body

e) Pomocí vztahů (4) a (5) byly v ukázce určeny nejpravděpodobnější hodnoty odporu rezistoru a kapacit kondenzátoru

$R = 3{,}22 \cdot 10^6\ \Omega, \quad C_1 = 2{,}18 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{F}, \quad C_2 = 3{,}24 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{F}.$ **3 body**

f) Pomocí kritérií z úkolu b) bylo v ukázce zjištěno, že rezistor je v dané černé skříňce připojen ke zdířce A, kondenzátor o kapacitě C_1 ke zdířce C a kondenzátor o kapacitě C_2 ke zdířce B. **1 bod**

g) Pro určení horních mezí vypočítaných veličin byly použity vztahy

$$R_{\max} = \frac{R_{\mathrm{v}}\left(\dfrac{1}{\tau_{3\min}} - \dfrac{1}{\tau_{1\max}} - \dfrac{1}{\tau_{2\max}}\right)}{\dfrac{1}{\tau_{1\max}} + \dfrac{1}{\tau_{2\max}}}, \tag{6}$$

$$C_{1\max} = \frac{\tau_{3\max}\left(1 + \dfrac{\tau_{1\max}}{\tau_{2\min}}\right)}{R_{\mathrm{v}}}, \quad C_{2\max} = \frac{\tau_{3\max}\left(1 + \dfrac{\tau_{2\max}}{\tau_{1\min}}\right)}{R_{\mathrm{v}}}. \tag{7}$$

V ukázce se došlo ke konečným výsledkům

$$R = (3{,}22 \pm 0{,}23)\ \mathrm{M\Omega}, \quad C_1 = (2{,}18 \pm 0{,}04)\ \mu\mathrm{F}, \quad C_2 = (3{,}24 \pm 0{,}06)\ \mathrm{F}.$$

3 body

Přísnější posouzení možné chyby dává *kvadratický zákon hromadění chyb*, podle kterého

$$\varkappa_{\overline{R}} = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial \tau_1}\right)^2 \varkappa_{\overline{\tau}1}^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial \tau_2}\right)^2 \varkappa_{\overline{\tau}2}^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial \tau_3}\right)^2 \varkappa_{\overline{\tau}3}^2}$$

obdobně pro C_1, C_2. Parciální derivace výrazů (4), (5) jsou

$$\frac{\partial R}{\partial \tau_1} = \frac{R_{\mathrm{v}}\tau_2^2}{\tau_3(\tau_1+\tau_2)}, \qquad \frac{\partial R}{\partial \tau_2} = \frac{R_{\mathrm{v}}\tau_1^2}{\tau_3(\tau_1+\tau_2)^2}, \qquad \frac{\partial R}{\partial \tau_3} = -\frac{R_{\mathrm{v}}\tau_1\tau_2}{\tau_3^2(\tau_1+\tau_2)},$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial \tau_1} = \frac{\tau_3}{R_{\mathrm{v}}\tau_2}, \qquad \frac{\partial C_1}{\partial \tau_2} = -\frac{\tau_3\tau_1}{R_{\mathrm{v}}\tau_2^2}, \qquad \frac{\partial C_1}{\partial \tau_3} = -\frac{\tau_1+\tau_2}{R_{\mathrm{v}}\tau_2},$$

$$\frac{\partial C_2}{\partial \tau_1} = \frac{\tau_3}{R_{\mathrm{v}}\tau_1}, \qquad \frac{\partial C_2}{\partial \tau_2} = -\frac{\tau_3\tau_2}{R_{\mathrm{v}}\tau_1^2}, \qquad \frac{\partial C_2}{\partial \tau_3} = -\frac{\tau_1+\tau_2}{R_{\mathrm{v}}\tau_1}.$$

Po dosazení hodnot uvedených v příloze dostaneme

$$\varkappa_{\overline{R}} = 1{,}6 \cdot 10^5\ \Omega, \qquad \varkappa_{\overline{C_1}} = 2{,}6 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{F}, \qquad \varkappa_{\overline{C_2}} = 4{,}0 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{F},$$

což jsou asi o třetinu menší hodnoty než v příloze.

Příloha – ukázka naměřených a vypočítaných hodnot

Zdířky	AB	BC	AC
U_1/V	3,00	4,00	3,00
U_2/V	1,10	1,47	1,10

č.	τ/s		
1	42,45	13,06	28,40
2	42,90	13,18	28,90
3	42,87	12,81	28,72
4	43,00	13,28	28,65
5	43,06	12,91	28,62
6	42,35	13,03	28,69
7	42,85	12,97	29,22
8	42,69	13,10	28,75
9	42,97	12,93	28,75
10	42,69	12,81	28,90
Průměr	42,783	13,008	28,760
σ_n	0,224	0,145	0,205
σ_{n-1}	0,236	0,153	0,216
$3\sigma_{n-1}/\sqrt{10}$	0,224	0,145	0,205

R_v/Ω	1,00E+07

τ_1/s	28,760
τ_2/s	42,783
τ_3/s	13,008

τ_{1max}/s	28,965
τ_{2max}/s	43,007
τ_{3max}/s	13,153

τ_{1min}/s	28,555
τ_{2min}/s	42,559
τ_{3min}/s	12,863

R	3,22E+06
R_{max}	3,46E+06
ΔR	2,34E+05

C_1	2,18E-06
C_{1max}	2,21E-06
ΔC_1	3,52E-08

C_2	3,24E-06
C_{2max}	3,30E-06
ΔC_2	6,04E-08

C1 je u zdířky	C
C2 je u zdířky	B
R je u zdířky	A