Řešení úloh regionálního kola 46. ročníku fyzikální olympiády.

Kategorie D

Autoři úloh: J. Jírů (1, 2, 3, 4)

1. a) V neinerciální vztažné soustavě spojené s osou kyvadla a kuličkou je celková síla napínající vlákno výslednicí tíhové síly a setrvačné odstředivé síly (obr. R1).

Z obrázku plyne

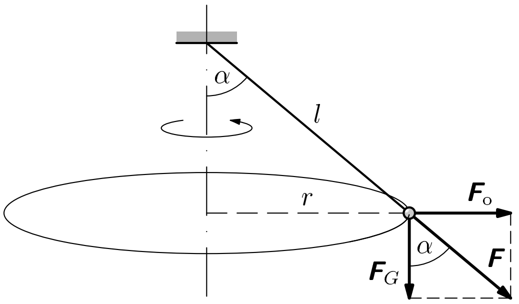
$$\cos\alpha = \frac{F_G}{F} = \frac{mg}{F}\,.$$

Dosazením podmínky

$$F_\mathrm{m} = 2F_G = 2mg$$

dostaneme

$$\cos\alpha_\mathrm{m} = \frac{1}{2}, \quad \text{tedy} \quad \alpha_\mathrm{m} = 60^\circ\,.$$



Obr. R1

3 body

Pro odstředivou sílu platí

$$F_\mathrm{o} = F_G \operatorname{tg}\alpha = mg\operatorname{tg}\alpha = \frac{mv^2}{r} = \frac{mv^2}{l\sin\alpha}\,.$$

Z toho $v^2 = lg\operatorname{tg}\alpha\sin\alpha$.

V mezním případě, kdy $\alpha = \alpha_\mathrm{m} = 60^\circ$, dostaneme

$$v_\mathrm{m}^2 = lg\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3lg}{2}\,, \qquad v_\mathrm{m} = \sqrt{\frac{3lg}{2}} = 4{,}2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

3 body

b) Pro odstředivou sílu rovněž platí

$$F_\mathrm{o} = F_G\operatorname{tg}\alpha = mg\operatorname{tg}\alpha = m\frac{4\pi^2}{T^2}r = m\frac{4\pi^2}{T^2}l\sin\alpha\,.$$

Z toho $T^2 = \dfrac{4\pi^2 l\cos\alpha}{g}\,, \qquad T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l\cos\alpha}{g}}\,.$

Z podmínky $60^\circ \geq \alpha > 0$, neboli $0{,}5 \leq \cos\alpha < 1$ dostaneme

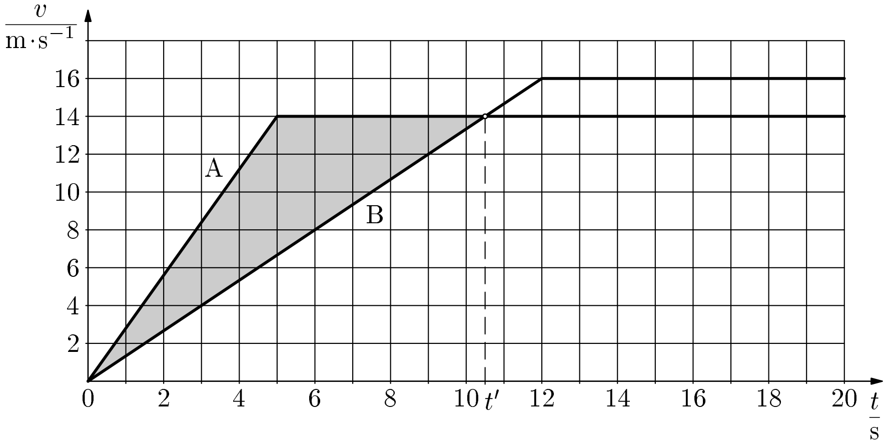
$$2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}} \leq T < 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,, \quad \text{číselně} \quad 1{,}55\ \mathrm{s} \leq T < 2{,}20\ \mathrm{s}\,.$$

4 body

2. a) K sestrojení grafu pro vozidlo A je nutno určit velikost v_1 konečné rychlosti a odpovídající čas t_1 rovnoměrně zrychleného pohybu. Z rovnic

$$v_1 = a_1 t_1, \quad s_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 \qquad \text{plyne} \qquad t_1 = \sqrt{\frac{2s_1}{a_1}}, \quad v_1 = \sqrt{2a_1 s_1}.$$

Číselně vychází $t_1 = 5{,}0$ s, $v_1 = 14\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. **2 body**



2 body

b) Vzdálenost mezi vozidly je maximální v čase t', kdy se velikosti rychlostí vyrovnají. Z grafu vyčteme nebo z rovnic $v_1 = a_2 t'$, $a_2 = v_2/t_2$ vypočítáme

$$t' = \frac{v_1 t_2}{v_2} = 10{,}5\ \mathrm{s}.$$

Hledanou maximální vzdálenost vypočítáme jako obsah trojúhelníka vyznačeného v grafu: $d_{\max} = \dfrac{(t' - t_1)v_1}{2}$ nebo ze vztahu $d_{\max} = \dfrac{1}{2} a_1 t_1^2 + v_1 (t' - t_1) - \dfrac{1}{2} a_2 t'^2$.

Po dosazení vychází $d_{\max} = 38{,}5$ m. **3 body**

c) Velikost vzájemné rychlosti obou vozidel je rovna absolutní hodnotě rozdílu velikostí jejich rychlostí. Ta je největší v čase $t_1 = 5$ s, kdy má hodnotu

$$\Delta v = v_1 - a_2 t_1 = v_1 - \frac{v_2}{t_2} t_1 = 7\frac{1}{3}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \doteq 7{,}3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$ **1 bod**

d) Během rozjíždění urazí vozidlo B dráhu

$$s_2 = \frac{1}{2} a_2 t_2^2 = \frac{1}{2} v_2 t_2 = 96\ \mathrm{m}.$$

Řešením rovnice $s_1 + v_1(t_3 - t_1) = s_2 + v_2(t_3 - t_2)$ dostaneme

$$t_3 = \frac{s_1 - s_2 + v_2 t_2 - v_1 t_1}{v_2 - v_1} = 30{,}5\ \mathrm{s}.$$ **2 body**

Poznámka: Nikde se nepožaduje obecné řešení.

3. a) Označme v_1 velikost rychlosti první loďky vzhledem k vodě. Ze zákona zachování hybnosti $m_1 v_1 = m_2 v_2$ plyne

$$v_1 = \frac{m_2}{m_1} v_2 \,. \tag{1}$$

Jelikož se loďky pohybují od sebe, je velikost vzájemné rychlosti rovna součtu velikostí jejich rychlostí vzhledem k vodě

$$v = v_1 + v_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} v_2 = 1{,}5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \,.$$ **2 body**

b) Podle 2. pohybového zákona platí

$$F = \frac{m_2 v_2}{\Delta t} = 96 \text{ N} \,.$$ **1 bod**

c) V soustavě spojené s první loďkou se druhá loďka vzdaluje rovnoměrně zrychleným pohybem a za dobu Δt dosáhne konečné rychlosti o velikosti v. Změna vzdálenosti je

$$\Delta d = \frac{1}{2} v \Delta t = \frac{m_1 + m_2}{2 m_1} v_2 \Delta t = 1{,}1 \text{ m} \,.$$ **3 body**

d) Chlapec vykonal práci, která je rovna součtu kinetických energií obou loděk:

$$W = E_{\mathrm{k1}} + E_{\mathrm{k2}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \,.$$

Užitím vzorce (1) dostaneme

$$W \frac{m_2 (m_1 + m_2)}{2 m_1} v_2^2 = 108 \text{ J} \,.$$ **2 body**

e) Platí

$$\frac{E_{\mathrm{k2}}}{E_{\mathrm{k1}}} = \frac{\frac{1}{2} m_2 v_2^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} = \frac{m_2 v_2^2}{m_1 \left(\frac{m_2}{m_1} v_2 \right)^2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{3}{2} \,.$$ **2 body**

4. a) Ve směru pohybu soustavy působí pohybové složky tíhových sil, proti pohybu působí smykové tření kvádru. Zrychlení soustavy má tedy velikost

$$a = \frac{2mg\sin\alpha - fmg\cos\alpha}{2m} = g\left(\sin\alpha - \frac{1}{2}f\cos\alpha\right) > 0\,.$$

Výraz je kladný, jestliže

$$f < \frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2\,\mathrm{tg}\,\alpha\,.$$

Pro dané hodnoty: $2\,\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}69 > 0{,}60 = f$. Podmínka je splněna. **3 body**

b) Z rovnic pro rovnoměrně zrychlený pohyb $v = at$, $d = \frac{1}{2}at^2 = \frac{v^2}{2a}$ odvodíme

$$t = \sqrt{\frac{2d}{a}} = \sqrt{\frac{2d}{g\left(\sin\alpha - \frac{1}{2}f\cos\alpha\right)}}\,, \qquad v = \sqrt{2ad} = \sqrt{2gd\left(\sin\alpha - \frac{1}{2}f\cos\alpha\right)}\,.$$

Číselně vychází $t = 4{,}1\ \mathrm{s}$, $v = 1{,}7\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. **3 body**

c) Na vozík působí ve směru pohybu pohybová složka tíhové síly a proti směru pohybu síla vlákna o velikosti F. Z druhého pohybového zákona plyne

$$ma = mg\sin\alpha - F\,,$$

$$F = mg\sin\alpha - ma = mg\sin\alpha - mg\left(\sin\alpha - \frac{1}{2}f\cos\alpha\right) = \frac{1}{2}fmg\cos\alpha = 4{,}2\ \mathrm{N}\,.$$

3 body

d) Pokud by se soustava nerozjela, byla by pohybová složka tíhové síly vozíku v rovnováze se silou vlákna. Pak

$$F = mg\sin\alpha = 4{,}8\ \mathrm{N}\,.$$

1 bod