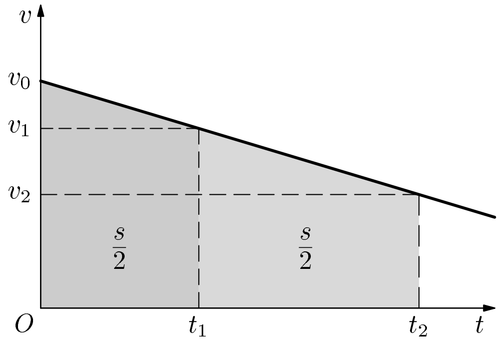
Řešení úloh regionálního kola 46. ročníku fyzikální olympiády.

Kategorie C

Autoři úloh: I. Volf (1), L'. Konrád (2), R. Horáková (3) a P. Šedivý (4)

1.a) Při průjezdu zatáčkou urazila souprava dráhu $s = \dfrac{\pi r}{2}$. Její rychlost se přitom rovnoměrně zmenšovala. Označme velikost počáteční rychlosti v_0, velikost rychlosti uprostřed zatáčky v_1 a velikost rychlosti na konci zatáčky v_2, dobu, za kterou souprava projela polovinu zatáčky t_1 a dobu, za kterou projela celou zatáčku t_2 (obr. R2).



Obr. R2

Protože se jednalo o pohyb rovnoměrně zpomalený, mělo tečné zrychlení opačný směr než okamžitá rychlost. Jeho velikost byla konstantní. Určíme ji ze vztahu

$$a_\mathrm{t} = \frac{v_0 - v_2}{t_2}$$

Dráha soupravy za dobu t_2 je číselně rovna obsahu lichoběžníku pod grafem rychlosti v obr. R2. Platí

$$s = \frac{v_0 + v_2}{2} t_2\,, \qquad t_2 = \frac{2s}{v_0 + v_2}\,.$$

Po dosazení do předcházejícího vztahu dostaneme

$$a_\mathrm{t} = \frac{(v_0 - v_2)(v_0 + v_2)}{2s} = \frac{v_0^2 - v_2^2}{\pi r} = 0{,}19\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}\,.$$

Normálová zrychlení na začátku a na konci zatáčky měla velikost

$$a_{\mathrm{n}0} = \frac{v_0^2}{r} = 0{,}78\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}\,, \qquad a_{\mathrm{n}2} = \frac{v_2^2}{r} = 0{,}195\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}\,.$$ **5 bodů**

b) Z obr. R2 dále plyne

$$\frac{s}{2} = \frac{v_0 + v_1}{2} t_1 = \frac{v_1 + v_2}{2}(t_2 - t_1)\,, \qquad \frac{v_0 - v_1}{t_1} = \frac{v_1 - v_2}{t_2 - t_1}\,.$$

Vynásobením obou rovnic a úpravou dostaneme

$$(v_0 - v_1)(v_0 + v_1) = (v_1 - v_2)(v_1 + v_2) \quad \Rightarrow \quad v_1^2 = \frac{v_0^2 + v_2^2}{2}\,,$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{v_0^2 + v_2^2}{2}} = 19{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 71\ \mathrm{km/h}\,.$$

Normálové zrychlení uprostřed zatáčky mělo velikost

$$a_{\mathrm{n}1} = \frac{v_1^2}{r} = \frac{v_0^2 + v_2^2}{2r} = \frac{a_{\mathrm{n}0} + a_{\mathrm{n}2}}{2} = 0{,}49\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}\,.$$

5 bodů

Alternativní řešení:

Jestliže byl pohyb soupravy rovnoměrně zpomalený, musela jej brzdit síla o stálé velikosti $F = ma_{\mathrm{t}}$, kde m je hmotnost soupravy. Práce spotřebovaná touto silou byla rovna úbytku kinetické energie soupravy. Z toho

$$ma_{\mathrm{t}}s = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv_2^2 \quad \Rightarrow \quad a_{\mathrm{t}} = \frac{v_0^2 - v_2^2}{2s}\,.$$

$$F\cdot\frac{s}{2} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_2^2 \quad \Rightarrow \quad v_1^2 = \frac{v_0^2 + v_2^2}{2}\,.$$

2.a) Označme v_1 velikost rychlosti první krychle po průchodu střely, v_2 velikost rychlosti druhé krychle po zachycení střely. Ze ZZH plynou pro srážky střely s první a druhou krychlí rovnice

$$mv_0 = Mv_1 + m\frac{v_0}{2}\,, \qquad m\frac{v_0}{2} = (m + M)v_2\,.$$

Řešením rovnic dostaneme $v_1 = \dfrac{mv_0}{2M}\,, \qquad v_2 = \dfrac{mv_0}{2(m+M)}\,, \qquad v_1 > v_2\,.$

3 body

Čas nárazu střely do druhé krychle je $t_1 = \dfrac{d}{\frac{v_0}{2}} = \dfrac{2d}{v_0}\,.$

Pro hledaný čas t_2 srážky obou krychlí je splněna rovnice

$$v_1 t_2 = d + v_2(t_2 - t_1)\,,$$

z níž plyne $t_2 = \dfrac{d - v_2 t_1}{v_1 - v_2}$. Dosazením z předcházejících rovnic nakonec dostaneme

$$t_2 = \frac{2d}{v_0}\left(\frac{M}{m}\right)^2 = 4{,}3\ \mathrm{s}\,.$$

4 body

b) Dráha uražená první krychlí do srážky s druhou krychlí je

$$s_1 = v_1 t_2 = \frac{mv_0}{2M}\cdot\frac{2d}{v_0}\left(\frac{M}{m}\right)^2 = \frac{M}{m}d = 16\ \mathrm{m}\,.$$

3 body

3. a) Oscilátor kmitá s periodou $T = 4t_0 = 1{,}40$ s. Pružina má tuhost

$$k = m\omega^2 = m\frac{4\pi^2}{T^2} = 20{,}1\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}\,.$$

1 bod

b) Platí $$E_{\mathrm{km}} = \frac{1}{2}ky_{\mathrm{m}}^2 = \frac{1}{2}m\cdot\frac{4\pi^2}{T^2}\cdot y_{\mathrm{m}}^2 = \frac{1}{2}mv_{\mathrm{m}}^2\,.$$

Z toho

$$y_{\mathrm{m}} = \frac{T}{\pi}\sqrt{\frac{E_{\mathrm{km}}}{2m}} = 0{,}095\ \mathrm{m} = 9{,}5\ \mathrm{cm}\,, \qquad v_{\mathrm{m}} = \sqrt{\frac{2E_{\mathrm{km}}}{m}} = 0{,}42\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,,$$

$$a_{\mathrm{m}} = \omega^2 y_{\mathrm{m}} = \omega v_{\mathrm{m}} = \frac{2\pi}{T}v_{\mathrm{m}} = 1{,}9\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}\,.$$

3 body

c) Ze zákona zachování energie plyne

$$\frac{1}{2}k\left(\frac{y_{\mathrm{m}}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ky_{\mathrm{m}}^2\,, \qquad v^2 = \frac{3}{4}\cdot\frac{k}{m}\cdot y_{\mathrm{m}}^2 = \frac{3}{4}\omega^2 y_{\mathrm{m}}^2 = \frac{3}{4}v_{\mathrm{m}}^2\,,$$

$$v = v_{\mathrm{m}}\sqrt{\frac{3}{4}} = 0{,}37\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

3 body

d) Ze vztahů

$$\frac{1}{2}ky^2 = \frac{1}{4}ky_{\mathrm{m}}^2\,, \qquad \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{4}mv_{\mathrm{m}}^2$$

plyne

$$y = \frac{y_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}} = 0{,}067\ \mathrm{m} = 6{,}7\ \mathrm{cm}\,, \qquad v = \frac{v_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}} = 0{,}30\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

3 body

4. a) Pro izobarické ochlazení platí Gay-Lussacův zákon:

$$\frac{V_3}{T_3} = \frac{3V_1}{T_3} = \frac{V_1}{T_1} \quad \Rightarrow \quad T_3 = 3T_1 = 900\ \mathrm{K}\,.$$

Pro adiabatickou expanzi platí stavová rovnice a Poissonův zákon:

$$\frac{p_2V_1}{T_2} = \frac{p_1V_3}{T_3} = \frac{p_1V_1}{T_1}\,, \qquad p_2V_1^{\varkappa} = p_1V_3^{\varkappa} = p_1(3V_1)^{\varkappa}\,.$$

Vydělením obou rovnic dostaneme

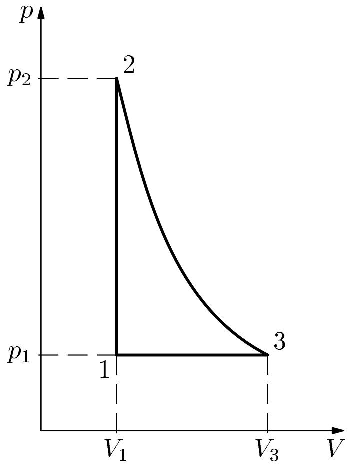
$$T_2 \cdot V_1^{\varkappa-1} = T_1 \cdot 3^{\varkappa}V_1^{\varkappa-1} \quad \Rightarrow \quad T_2 = T_1 \cdot 3^{\varkappa} = 1\,397\ \mathrm{K}\,.$$

Pro izochorické ohřátí platí Charlesův zákon:

$$\frac{p_2}{T_2} = \frac{p_1}{T_1} \quad \Rightarrow \quad p_2 = p_1\frac{T_2}{T_1} = p_1 \cdot 3^{\varkappa} = 4{,}66 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa}\,.$$

4 body

b)



Obr. R1

2 body

c) Celková práce plynu je rovna rozdílu práce vykonané při adiabatické expanzi a práce spotřebované při izobarickém ochlazení $W'_{23} - W_{31}$:

$$W'_{23} = U_2 - U_3 = nC_V(T_2 - T_3) = 2{,}5nRT_1(3^{\varkappa} - 3) = 2{,}5p_1V_1(3^{\varkappa} - 3)\,.$$

$$W_{31} = p_1(V_3 - V_1) = 2p_1V_1\,, \qquad W' = [2{,}5(3^{\varkappa} - 3) - 2]\,p_1V_1 = 214\ \mathrm{J}\,.$$

Plyn přijímá teplo pouze při izochorickém ohřátí:

$$Q_{12} = nC_V(T_2 - T_1) = 2{,}5nRT_1(3^{\varkappa} - 1) = 2{,}5p_1V_1(3^{\varkappa} - 1) = 914\ \mathrm{J}\,.$$

Účinnost kruhového děje

$$\eta = \frac{W'}{Q_{12}} = \frac{2{,}5(3^{\varkappa} - 3) - 2}{2{,}5(3^{\varkappa} - 1)} = 0{,}234 \doteq 23\ \%\,.$$

4 body