Řešení úloh regionálního kola 46. ročníku fyzikální olympiády.

Kategorie B

Autoři úloh: P. Šedivý (1, 3), J. Jírů (2) a M. Cvrček (4)

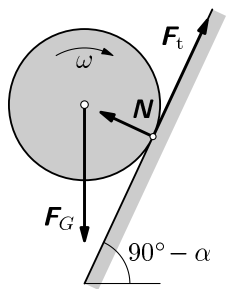
1.a) Pokud by bylo tření mezi válcem a pravou nakloněnou rovinou dostatečně velké, válec by po ní vyjel nahoru. Přitom by na něj působila pouze tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$ a síla nakloněné roviny s normálovou složkou $\boldsymbol{N}$ a tečnou složkou $\boldsymbol{F}_\mathrm{t}$ (obr. R1). Ze vztahů

$$F_\mathrm{t} = fN = fF_G \sin\alpha > F_G \cos\alpha$$

plyne pro tento případ $f > \mathrm{cotg}\alpha$. Aby válec zůstal trvale ve styku s oběma nakloněnými rovinami, musí platit

$$f \leq \mathrm{cotg}\alpha$$

Pro dané hodnoty je tato podmínka splněna.

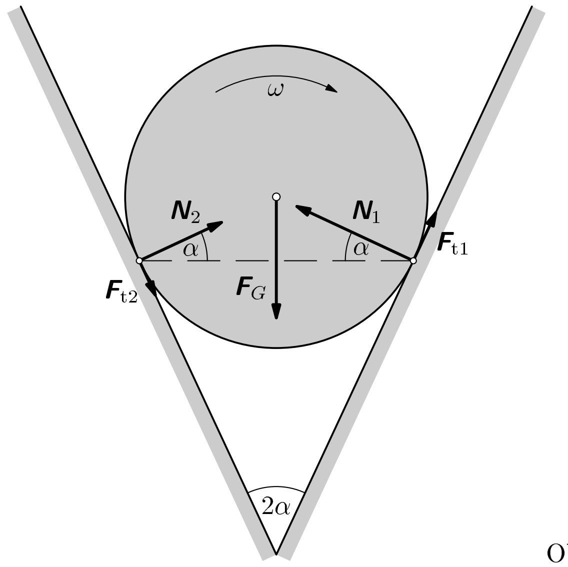


Obr. R1

3 body

b) Na roztočený válec působí nakloněné roviny silami s normálovými složkami $\boldsymbol{N}_1$, $\boldsymbol{N}_2$ a tečnými složkami (třecími silami) $\boldsymbol{F}_{\mathrm{t}1}$, $\boldsymbol{F}_{\mathrm{t}2}$ (obr. R2). Těžiště válce se nepohybuje. Proto je výslednice všech sil, které působí na válec, nulová:

$$\boldsymbol{N}_1 + \boldsymbol{N}_2 + \boldsymbol{F}_{\mathrm{t}1} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{t}2} + \boldsymbol{F}_G = \boldsymbol{0}$$



Obr. R2

Rozepsáním podle souřadnic a použitím vztahu $F_{\mathrm{t}} = fN$ dostaneme soustavu rovnic

$$N_1(f\sin\alpha - \cos\alpha) + N_2(f\sin\alpha + \cos\alpha) = 0\,,$$
$$N_1(f\cos\alpha + \sin\alpha) - N_2(f\cos\alpha - \sin\alpha) = mg\,,$$

která má řešení

$$N_1 = \frac{mg(\cos\alpha + f\sin\alpha)}{2(f^2+1)\sin\alpha\cos\alpha}\,, \qquad N_2 = \frac{mg(\cos\alpha - f\sin\alpha)}{2(f^2+1)\sin\alpha\cos\alpha}\,.$$

Pro dané hodnoty $N_1 = 52{,}1\ \mathrm{N}, \quad N_2 = 43{,}8\ \mathrm{N},$

$$F_{\mathrm{t1}} = fN_1 = 7{,}8\ \mathrm{N}, \quad F_{\mathrm{t2}} = fN_2 = 6{,}6\ \mathrm{N}.$$

4 body

Poznámka: Z nerovnosti $N_2 \geq 0$ plyne

$$\cos\alpha - f\sin\alpha \geq 0, \quad \text{tj.} \quad f \leq \mathrm{cotg}\alpha,$$

jak jsme zjistili při řešení úlohy a).

c) Úhlové zrychlení válce má velikost $\varepsilon = M/J$, kde

$$M = (F_{\mathrm{t1}} + F_{\mathrm{t2}})r = \frac{2mgfr\cos\alpha}{2(f^2+1)\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{mgfr}{(f^2+1)\sin\alpha}$$

je celkový moment třecích sil vzhledem k ose válce a $J = mr^2/2$ je moment setrvačnosti válce.

Z toho $\varepsilon = \dfrac{2fg}{r(f^2+1)\sin\alpha}$.

Brzdná doba je tedy

$$t_{\mathrm{b}} = \frac{\omega_0}{\varepsilon} = \frac{\omega_0 r(f^2+1)\sin\alpha}{2gf} = 0{,}695\ \mathrm{s}\,.$$

Úhlová dráha válce během brzdění

$$\varphi = \frac{\omega_0}{2}t_{\mathrm{b}} = 34{,}7\ \mathrm{rad}$$

odpovídá 5,5 otáčkám.

3 body

2. a) Dráha zastavení je určena maximální výchylkou y_m nárazníků při stlačení. V okamžiku zastavení je energie pružnosti obou nárazníků rovna kinetické energii vagonu před nárazem. Z rovnice

$$\frac{1}{2}mv^2 = 2 \cdot \frac{1}{2}ky_{\mathrm{m}}^2$$

určíme hledanou dráhu

$$\Delta s = y_{\mathrm{m}} = v\sqrt{\frac{m}{2k}} = 0{,}12\ \mathrm{m}\,. \tag{1}$$

2 body

b) Během deformace je pohyb vagonu harmonický a doba vzájemného dotyku nárazníků je rovna polovině periody harmonického pohybu tělesa o hmotnosti m na pružině o tuhosti $2k$

$$\Delta t = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{m}{2k}} = 0{,}13\ \mathrm{s}\,. \tag{2}$$

2 body

c) Vagon během doby Δt změnil svoji okamžitou rychlost z $\boldsymbol{v}$ na $-\boldsymbol{v}$, došlo ke změně rychlosti o $\Delta\boldsymbol{v} = (-\boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{v}) = -2\boldsymbol{v}$. Velikost této změny je $|\Delta\boldsymbol{v}| = 2v$. Průměrná velikost zrychlení proto je

$$a_{\mathrm{p}} = \frac{2v}{\Delta t}\,.$$

Užitím rovnice (2) dostaneme

$$a_{\mathrm{p}} = \frac{2v}{\pi}\sqrt{\frac{2k}{m}} = 45\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}\,.$$

3 body

d) Vagon působí silou o maximální velikosti F_{m} při maximální deformaci:

$$F_{\mathrm{m}} = 2ky_{\mathrm{m}}\,.$$

Užitím rovnice (1) dostaneme

$$F_{\mathrm{m}} = v\sqrt{2km}\,.$$

Hledaný poměr pak je

$$n = \frac{F_{\mathrm{m}}}{F_G} = \frac{v\sqrt{2km}}{mg} = \frac{v}{g}\sqrt{\frac{2k}{m}} = 7{,}1\,.$$

3 body

3.a) Proudy v síti se nezmění, jestliže ampérmetr nahradíme zkratem a schéma překreslíme podle obr. R3. Celkový odpor obvodu je

$$R_\mathrm{c} = \frac{1{,}5R \cdot (R + 0{,}5R)}{R + (1{,}5R + 0{,}5R)} = \frac{3}{4}R\,.$$

Proudy v jednotlivých větvích určíme pomocí Ohmova zákona a 1. Kirchhoffova zákona:

$$I_1 = \frac{U}{R_\mathrm{c}} = \frac{4U}{3R}\,, \qquad I_3 = \frac{U}{1{,}5R} = \frac{2U}{3R} = 0{,}5I_1\,,$$

$$I_2 = I_1 - I_3 = 0{,}5I_1 = \frac{2U}{3R}\,, \qquad I_4 = I_5 = 0{,}5I_2 = \frac{U}{3R}\,,$$

$$I_\mathrm{A} = I_3 + I_5 = \frac{3U}{3R} = \frac{U}{R}\,.$$

5 bodů

b) Proudy v síti se nezmění, jestliže voltmetr odpojíme a obvod překreslíme podle obr. R4. Celkový odpor obvodu je

$$R_\mathrm{c} = R + \frac{2{,}5R \cdot R}{3{,}5R} = \frac{12}{7}R\,.$$

Jednotlivými větvemi procházejí proudy

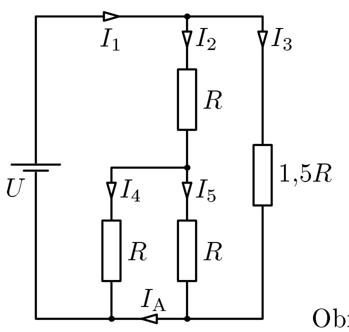
$$I_1 = \frac{U}{R_\mathrm{c}} = \frac{7U}{12R}\,, \qquad I_3 = \frac{U - RI_1}{R} = \frac{U}{R} - I_1 = \frac{U}{R}\left(1 - \frac{7}{12}\right) = \frac{5U}{12R}\,,$$

$$I_2 = I_1 - I_3 = \frac{U}{6R}\,.$$

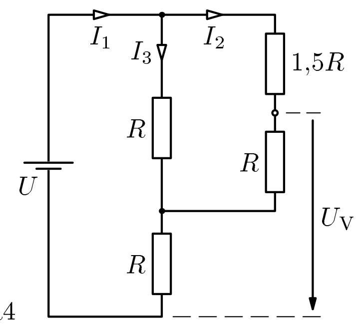
Mezi body, kam byl připojen voltmetr, je napětí

$$U_\mathrm{V} = RI_1 + RI_2 = \frac{9}{12}U = \frac{3}{4}U\,.$$

5 bodů



Obr. R3



Obr. R4

4.a) Hustotu ϱ_0 atmosféry u povrchu Venuše určíme pomocí stavové rovnice:

$$\frac{pV}{T} = \frac{m}{M_\mathrm{m}} R \quad \Rightarrow \quad \varrho = \frac{m}{V} = \frac{pM_\mathrm{m}}{RT} \,,$$

kde m a V jsou hmotnost a objem určitého množství plynu. Molární hmotnost plynu, který tvoří atmosféra Venuše je

$$M_\mathrm{m} = k_1 M_\mathrm{m}(\mathrm{CO_2}) + k_2 M_\mathrm{m}(\mathrm{N_2}) = 43{,}4 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot mol^{-1}} \,.$$

Po dosazení

$$\varrho_0 = \frac{p_0 M_\mathrm{m}}{RT} = 64{,}5\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}} \,.$$

2 body

Gravitační zrychlení na povrchu Venuše určíme pomocí gravitačního zákona:

$$F_G = mg_\mathrm{v} = \varkappa \frac{Mm}{R^2} \quad \Rightarrow \quad g_\mathrm{v} = \frac{\varkappa M}{R^2} = 8{,}87\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} \,.$$

2 body

b) Teplotu t_1, při které začne balon stoupat, určíme užitím Archimedova zákona z rovnosti tíhové a vztlakové síly:

$$F_G = mg_\mathrm{v} + V\varrho_1 g_\mathrm{v} = F_\mathrm{vz} = V\varrho_0 g_\mathrm{v} \,,$$

kde ϱ_1 je hustota plynu uvnitř balonu při tlaku p_0 a teplotě t_1. Ze stavové rovnice plyne $\varrho_1 = \varrho_0 T/T_1$. Pak

$$m = V\varrho_0 \left(1 - \frac{T}{T_1}\right) \,, \qquad T_1 = \frac{T}{1 - \dfrac{m}{\varrho_0 V}} = 761\ \mathrm{K} \,, \qquad t_1 = 488\ {}^\circ\mathrm{C} \,.$$

2 body

Tlak atmosféry Venuše a její hustotu ve výšce h určíme užitím barometrické rovnice a ze stavové rovnice

$$p = p_0\, \mathrm{e}^{-\frac{\varrho_0 g_\mathrm{v} h}{p_0}} \,, \qquad \varrho = \frac{pM_\mathrm{m}}{RT} = \varrho_0\, \mathrm{e}^{-\frac{\varrho_0 g_\mathrm{v} h}{p_0}} \,.$$

Plyn uvnitř balonu bude mít hustotu $\varrho_2 = \varrho \dfrac{T}{T_2}$. Dosazením a úpravou dostaneme

$$m = \varrho_0 V \left(1 - \frac{T}{T_2}\right) \mathrm{e}^{-\frac{\varrho_0 g_\mathrm{v} h}{p_0}} \,, \qquad \mathrm{e}^{\frac{\varrho_0 g_\mathrm{v} h}{p_0}} = \frac{\varrho_0 V}{m} \left(1 - \frac{T}{T_2}\right) \,,$$

$$T_2 = \frac{T}{1 - \dfrac{m}{\varrho_0 V}\, \mathrm{e}^{\frac{\varrho_0 g_\mathrm{v} h}{p_0}}} = 762\ \mathrm{K} \,, \qquad t_2 = 489\ {}^\circ\mathrm{C} \,.$$

4 body