Úlohy 1. kola 46. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie B*

Ve všech úlohách počítejte s tíhovým zrychlením $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

1. Klouzání po kouli v homogenním tíhovém poli

Na horizontální rovině je upevněna dokonale hladká koule o poloměru $R = 1$ m. Z jejího nejvyššího bodu necháme volně sklouznout malé tělísko (hmotný bod). Tělísko se bude nejprve pohybovat po povrchu koule, ale v určitém místě povrch koule opustí. Určete:

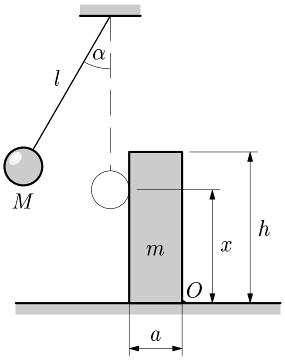
a) místo na kouli, v němž tělísko kouli opustí,

b) vzdálenost místa dopadu tělíska a místa dotyku koule s rovinou,

c) rychlost dopadu tělíska na vodorovnou rovinu.

2. Převrácení sloupku

Na vodorovné podložce stojí homogenní sloupek tvaru pravidelného čtyřbokého hranolu o hmotnosti m s podstavnou hranou délky a, výškou h. Na vlákně délky l je upevněna koule o hmotnosti M, která se v rovnovážné poloze dotýká sloupku ve výšce x nad podložkou (obr. 1). Kouli vychýlíme při napnutém vlákně o úhel $\alpha \leq 90°$ a pustíme ji. Při návratu do rovnovážné polohy narazí na sloupek, přičemž náraz považujeme za dokonale pružný. V bodě O podložky je malá zarážka, takže sloupek se nemůže po podložce sklouznout.



Obr. 1

a) Jaká musí být výška x, aby koule po nárazu na sloupek zůstala nehybná?

b) Jaký musí být v tomto případě úhel α, aby se sloupek převrátil?

Úlohu řešte obecně a určete podmínky řešitelnosti.

Moment setrvačnosti sloupku vzhledem k ose procházející jeho těžištěm rovnoběžně s podstavnou hranou je $J_0 = \frac{1}{12}m(a^2 + h^2)$.

3. Napínání drátu

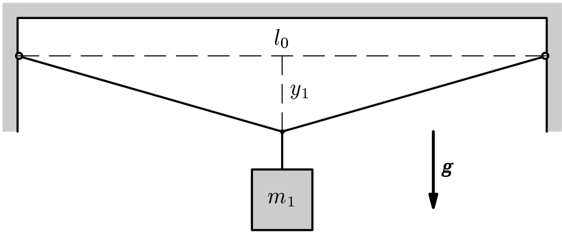
Ocelový drát s obsahem S příčného řezu je vodorovně upevněn mezi dvěma svorkami tuhého rámu, jejichž vzdálenost je l_0. Počáteční normálové napětí drátu je zanedbatelné.

a) Jakou hmotnost m_1 musí mít závaží, které zavěsíme uprostřed drátu (obr. 2), aby normálové napětí v drátu dosáhlo meze úměrnosti σ_1? Jaká bude v tomto případě výchylka y_1 středu drátu? Modul pružnosti v tahu pro daný drát je E.

b) Jak se bude měnit výchylka y středu drátu v závislosti na hmotnosti závaží v intervalu $0 < m < m_1$? Sestrojte graf této závislosti.

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty $S = 1{,}00\ \mathrm{mm}^2$, $E = 2{,}2 \cdot 10^{11}$ Pa, $\sigma_1 = 6{,}0 \cdot 10^8$ Pa, $l_0 = 2{,}0$ m.

Při řešení můžete použít přibližný vztah $\sqrt{1+x} \approx 1 + \dfrac{x}{2}$ pro $x \ll 1$.



Obr. 2

4. Kmitání misky zavěšené na pružině

Na stojanu je zavěšena pružina o zanedbatelné hmotnosti zatížená masivní miskou o neznámé hmotnosti m_1. Po vychýlení misky ve svislém směru se celá soustava rozkmitala s periodou T_1 a po delší době se ustálila v rovnovážné poloze. Pak jsme umístili těsně nad misku závaží o známé hmotnosti m_2 a pustili je na misku. Soustava se opět rozkmitala, tentokrát s periodou T_2.

a) Určete hmotnost misky m_1 a tuhost pružiny k.

b) S jakou amplitudou se miska rozkmitala po uvolnění závaží?

c) Jak se měnila tíha, kterou působilo závaží na misku během kmitání? Vyjádřete závislost velikosti této síly na čase a určete poměr její největší a nejmenší hodnoty.

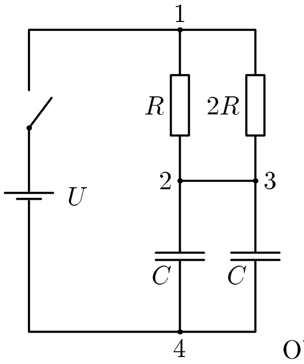
Řešte obecně a pro hodnoty $T_1 = 1{,}50$ s, $T_2 = 2{,}05$ s, $m_2 = 1{,}00$ kg.

5. Nabíjení kondenzátorů

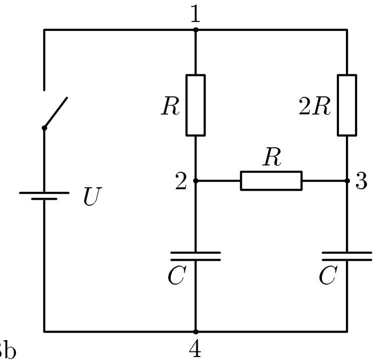
a) V zapojení podle obr. 3a sepneme spínač a nabijeme dva paralelně spojené kondenzátory o stejné kapacitě C ze zdroje o elektromotorickém napětí U a zanedbatelném vnitřním odporu přes dva paralelně spojené rezistory o odporech R a $2R$. Jaký náboj projde během nabíjení mezi uzly 2 a 3?

b) Podruhé vložíme mezi uzly 2 a 3 rezistor o odporu R (obr. 3 b). Jaký náboj projde během nabíjení mezi uzly 2 a 3 v tomto případě?

c) V obou případech určete celkové Joulovo teplo, které během nabíjení vznikne na všech rezistorech obvodu.



Obr. 3a



Obr. 3b

6. *Praktická úloha:* **Určení elektrochemického ekvivalentu mědi při elektrolýze roztoku síranu měďnatého**

Teorie: Prochází-li elektrický proud nádobou s roztokem síranu měďnatého (modré skalice) $CuSO_4$ a měděnými elektrodami, anoda se rozpouští a na katodě se naopak vylučuje velmi čistá měď. Podle 1. Faradayova zákona pro elektrolýzu je hmotnost m vyloučené látky přímo úměrná prošlému náboji Q:

$$m = AQ = AIt\,.$$

Konstanta úměrnosti A je *elektrochemický ekvivalent* vylučované látky, v daném případě dvojmocné mědi.

Provedení úlohy: Použijeme školní soupravu pro pokusy z elektrolýzy (hranatá kádinka, dva držáky elektrod, elektrody). Do kádinky nalejeme roztok 0,5 molu modré skalice v 0,5 litru vody. Měděné elektrody očistíme smirkovým papírem a tu, kterou použijeme jako katodu, pečlivě zvážíme. Sestavíme soupravu tak, aby elektrody byly vzájemně rovnoběžné a ponořené části elektrod měly plošný obsah alespoň 25 cm^2. (Počítáme jen stranu přivrácenou k druhé elektrodě.) Soupravu připojíme k regulovatelnému zdroji stejnosměrného napětí nebo přes vhodný reostat ke zdroji stálého stejnosměrného napětí a po dostatečně dlouhou dobu (alespoň jednu hodinu) udržujeme stálý proud 0,5 A. Po vypnutí proudu vyjmeme katodu, opláchneme ji a osušíme proudem horkého vzduchu (neotíráme). Suchou elektrodu znovu zvážíme.

Úkol: Z hmotnosti mědi vyloučené na katodě a náboje, který prošel elektrolytem určete elektrochemický ekvivalent mědi. Zhodnoťte přesnost měření a odhadněte možnou chybu výsledku. Výsledek porovnejte s tabulkovou hodnotou.

7. Stoupající gumový balonek

Gumový balonek o hmotnosti $m_\mathrm{b} = 2{,}50$ g je naplněn heliem tak, že při okolním atmosférickém tlaku $p_\mathrm{a0} = 0{,}973 \cdot 10^5$ Pa má objem $V_0 = 7{,}50$ l a tlak uvnitř balonku je $p_0 = 0{,}988 \cdot 10^5$ Pa. Helium má teplotu $t_0 = 17{,}0$ °C okolního vzduchu.

a) Určete počáteční zrychlení $\boldsymbol{a}_0$ balonku po jeho uvolnění.

b) Vypočítejte výšku h, ve které balonek praskne, víte-li z experimentu, že k tomu dojde, když se jeho objem zvětší na $V = \alpha V_0$, kde $\alpha = 3{,}0$. Předpokládejte přitom, že objem balonku se při výstupu zvětšuje tak, že je přímo úměrný přetlaku plynu vzhledem k okolnímu atmosférickému tlaku, a že teplota vzduchu se s výškou nemění.

c) Stanovte podmínky řešitelnosti úlohy.

Poznámka: K řešení můžete použít *barometrickou rovnici* (viz studijní text *Mechanika ideálních plynů*):

$$p_\mathrm{a} = p_\mathrm{a0} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\varrho_0}{p_\mathrm{a0}} gh} = p_\mathrm{a0} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{M_\mathrm{m}}{RT_0} gh} .$$

Molární hmotnost vzduchu $M_\mathrm{m} = 28{,}96 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot mol^{-1}}$,

molární hmotnost helia $M'_\mathrm{m} = 4{,}003 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot mol^{-1}}$,

molární plynová konstanta $R = 8{,}314\ \mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$.