Řešení úloh celostátního kola 46. ročníku fyzikální olympiády.

Autoři úloh: J. Machalický (1), M. Jarešová (2), I. Čáp (3) a P. Šedivý (4)
Konečná úprava: P. Šedivý

1. a) Vyjdeme z obr. R1: Odvalování tyče po válci si můžeme představit jako její rotaci kolem okamžitého pólu P. Má-li být původní rovnovážná poloha stabilní, musí být moment tíhové síly vzhledem k pólu P při malém vychýlení namířen proti úhlové výchylce tyče. Vychýlíme-li tyč vpravo o úhel α, má oblouk P_0P délku $r\alpha$. Vektorová přímka tíhové síly musí procházet vlevo od bodu P. Proto

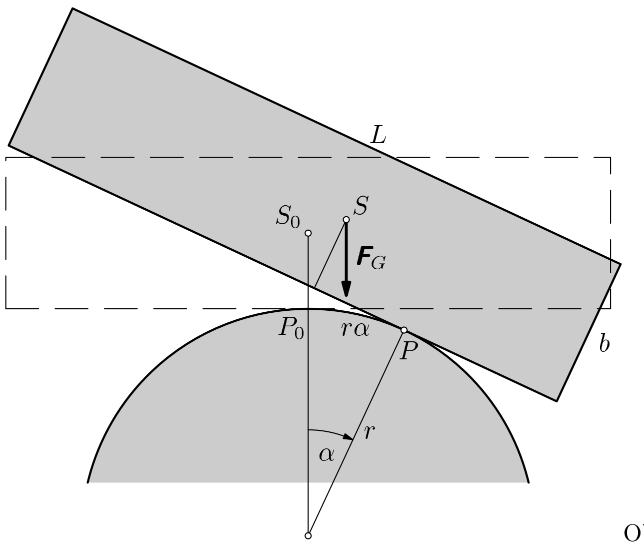
$$r\alpha \cos\alpha > \frac{b}{2}\sin\alpha\,.$$

Pro malé úhly můžeme položit $\cos\alpha \approx 1$, $\sin\alpha \approx \alpha$. Pak

$$r\alpha > \frac{b}{2}\alpha\,, \qquad r > \frac{b}{2}\,.$$

Aby rovnovážná poloha horní tyče byla stabilní, musí být její výška b menší než průměr dolní válcové tyče. To je pro dané hodnoty splněno.

3 body



Obr.R1

b) *Řešení užitím zákona zachování energie:*
Předpokládáme, že se jedná o harmonické kmity s úhlovou frekvencí ω. Pro okamžitou úhlovou výchylku α horní tyče a pro její úhlovou rychlost Ω platí

$$\alpha = \alpha_{\mathrm{m}} \sin\omega t\,, \qquad \Omega = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \omega\alpha_{\mathrm{m}}\cos\omega t\,,$$

kde α_{m} je amplituda úhlové výchylky. Po vychýlení o úhel α se hmotný střed S tyče zvedne oproti rovnovážné poloze S_0 do výšky

$$h = r\alpha \sin\alpha - \frac{b}{2}(1-\cos\alpha) - r(1-\cos\alpha)\,.$$

Pro malé úhly položíme

$$\sin\alpha \approx \alpha\,, \qquad 1-\cos\alpha = 1-\sqrt{1-\sin^2\alpha} \approx \frac{\alpha^2}{2}.$$

Pak $h \approx \left(r - \frac{b}{2}\right)\frac{\alpha^2}{2}$. Považujeme-li potenciální energii tyče v rovnovážné poloze na nulovou, je v krajní poloze

$$E_\mathrm{p} = mg\left(r-\frac{b}{2}\right)\frac{\alpha_\mathrm{m}^2}{2}\,.$$

Při návratu do rovnovážné polohy se tyč otáčí s maximální úhlovou rychlostí $\Omega_\mathrm{m} = \omega\alpha_\mathrm{m}$ okolo pólu P_0 a má kinetickou energii

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}J\Omega_\mathrm{m}^2\,,$$

přičemž podle Steinerovy věty $J = \frac{m(L^2+b^2)}{12} + m\frac{b^2}{4} = \frac{m(L^2+4b^2)}{12}$.

Ze zákona zachování energie plyne

$$mg\left(r-\frac{b}{2}\right)\frac{\alpha_\mathrm{m}^2}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{m(L^2+4b^2)}{12}\cdot\omega^2\alpha_\mathrm{m}^2\,,$$

$$\omega^2 = \frac{12\left(r-\frac{b}{2}\right)g}{L^2+4b^2}\,, \qquad \omega = 2\sqrt{\frac{3g\left(r-\frac{b}{2}\right)}{L^2+4b^2}} = \frac{2\pi}{T}\,.$$

Tyč bude kývat s periodou $T = \pi\sqrt{\frac{L^2+4b^2}{3g\left(r-\frac{b}{2}\right)}}$.

6 bodů

Pro dané hodnoty $T = 1{,}65$ s **1 bod**

Řešení užitím pohybové rovnice:

Vychýlíme-li horní tyč o úhel α, působí v opačném smyslu moment tíhové síly

$$M = -mg\left(r\alpha\cos\alpha - \frac{b}{2}\sin\alpha\right)\,.$$

Moment setrvačnosti tyče vzhledem k okamžitému pólu P je

$$J = J_0 + m\left[(r\alpha)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right] = \frac{m(L^2+b^2)}{12} + m\left[(r\alpha)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right] = \\ = \frac{m\left[L^2+4b^2+12(r\alpha)^2\right]}{12}\,.$$

Užitím druhé impulsové věty $M = J\varepsilon = J\ddot{\alpha}$ dostaneme pohybovou rovnici

$$-mg\left(r\alpha\cos\alpha - \frac{b}{2}\sin\alpha\right) = \frac{m\left[L^2+4b^2+12(r\alpha)^2\right]}{12}\ddot{\alpha}\,.$$

Pro kmity s malou amplitudou můžeme použít aproximace $\sin\alpha \approx \alpha$, $\cos\alpha \approx 1$ a zanedbat člen $12(r\alpha)^2$. Pohybová rovnice se zjednoduší na tvar

$$-mg\left(r-\frac{b}{2}\right)\alpha = \frac{m(L^2+4b^2)}{12}\ddot{\alpha}\,, \qquad \ddot{\alpha} = \frac{12g\left(r-\frac{b}{2}\right)}{L^2+4b^2}\alpha\,,$$

což je rovnice harmonických kmitů s úhlovou frekvencí $\omega = 2\sqrt{\dfrac{3g\left(r-\frac{b}{2}\right)}{L^2+4b^2}}$ a periodou $T = \pi\sqrt{\dfrac{L^2+4b^2}{3g\left(r-\frac{b}{2}\right)}}$.

2. a) Vyjdeme z obr. R2. Na válec působí kromě síly $\boldsymbol{F}$ ještě tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$ a reakce $\boldsymbol{F}_\mathrm{r}$ vodorovné roviny, která má normálovou složku $\boldsymbol{N}$ a tečnou složku $\boldsymbol{F}_\mathrm{t}$ – třecí sílu. Z pohybových zákonů plyne

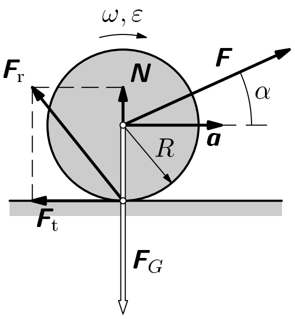
$$F\cos\alpha - F_\mathrm{t} = ma\,, \tag{1}$$

$$F\sin\alpha + N = mg\,, \quad N = mg - F\sin\alpha\,, \tag{2}$$

$$F_\mathrm{t}R = J_0\varepsilon = \frac{mR^2}{2}\varepsilon\,. \tag{3}$$

Pokud valení probíhá bez prokluzu, platí ještě

$$a = R\varepsilon \tag{4}$$



Obr. R2

kde ε je úhlové zrychlení válce a a je zrychlení jeho těžiště. Pak

$$F_\mathrm{t}R = J_0\frac{a}{R} = \frac{mRa}{2}\,, \qquad F_\mathrm{t} = \frac{ma}{2}\,. \tag{5}$$

Z rovnic (1) a (5) plyne

$$F\cos\alpha = F_\mathrm{t} + ma = \frac{3}{2}ma = 3F_\mathrm{t}\,, \qquad F_\mathrm{t} = \frac{F\cos\alpha}{3}\,. \tag{6}$$

Pro smykové tření musí platit $F_\mathrm{t} \leq fN$. Z toho

$$\frac{F\cos\alpha}{3} \leq f(mg - F\sin\alpha)\,, \qquad F \leq \frac{3fmg}{\cos\alpha + 3f\sin\alpha}\,,$$

$$F_\mathrm{max} = \frac{3fmg}{\cos\alpha + 3f\sin\alpha}\,. \tag{7}$$

Z (3), (6) a (7) dostaneme

$$\varepsilon_{\max} = \frac{F_{\mathrm{t}\max} \cdot R}{J_0} = \frac{F_{\max} \cos\alpha \cdot R}{3J_0} = \frac{2fg\cos\alpha}{R(\cos\alpha + 3f\sin\alpha)} \tag{8}$$

4 body

b) Hodnoty vypočítané podle (7) a (8) budou nejmenší pro takový úhel α, pro který výraz $\cos\alpha + 3f\sin\alpha$ dosahuje maxima. Nutná podmínka pro to je, aby první derivace tohoto výrazu podle α byla nulová:

$$\frac{\mathrm{d}(\cos\alpha + 3f\sin\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = -\sin\alpha + 3f\cos\alpha = 0\,, \qquad \mathrm{tg}\,\alpha = 3f\,.$$

Že se skutečně jedná o maximum, ověříme pomocí druhé derivace:

$$\frac{\mathrm{d}^2(\cos\alpha + 3f\sin\alpha)}{\mathrm{d}\alpha^2} = -\cos\alpha - 3f\sin\alpha < 0 \quad \text{pro} \quad \alpha \in (0, 90^\circ)\,.$$

Hodnoty $F_{\max}$ a $\varepsilon_{\max}$ jsou tedy nejmenší pro úhel

$$\alpha = \mathrm{arctg}\,3f = \mathrm{arctg}\,0{,}75 = 36{,}9^\circ\,.$$

3 body

Pro daný úhel platí

$$\mathrm{tg}^2\,\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} = \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 9f^2\,.$$

Z toho

$$\sin\alpha = \frac{3f}{\sqrt{1+9f^2}}\,, \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+9f^2}}\,,$$

$$F_{\max} = \frac{3fmg}{\dfrac{1}{\sqrt{1+9f^2}} + 3f\dfrac{3f}{\sqrt{1+9f^2}}} = \frac{3mgf}{\sqrt{1+9f^2}} = 29{,}4\ \mathrm{N}\,,$$

$$\varepsilon_{\max} = \frac{2fg\dfrac{1}{\sqrt{1+9f^2}}}{R\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+9f^2}} + 3f\dfrac{3f}{\sqrt{1+9f^2}}\right)} = \frac{2fg}{R(1+9f^2)} = 31{,}4\ \mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-2}\,.$$

3 body

3. a) Na elektron působí v magnetickém poli dostředivá magnetická síla. Platí

$$\frac{mv^2}{r} = Bev\,, \qquad m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\,.$$

Z toho vyjádříme velikost hybnosti elektronu

$$p = mv = Ber = \frac{Bex}{2}\,.$$

Ze vztahu mezi celkovou energií elektronu, klidovou energií elektronu a jeho hybností

$$E^2 = E_0^2 + p^2c^2 = m_0^2c^4 + \left(\frac{Becx}{2}\right)^2$$

plyne pro kinetickou energii elektronu vztah

$$E_\mathrm{k} = E - E_0 = \sqrt{m_0^2c^4 + \left(\frac{Becx}{2}\right)^2} - m_0c^2\,.$$

Z toho

$$\frac{Becx}{2} = \sqrt{E_\mathrm{k}^2 + 2m_0c^2E_\mathrm{k}}\,. \tag{1}$$

Při testování platí $E_\mathrm{k} = U_1e,\ x = x_1$. Pak

$$B = \frac{2\sqrt{U_1^2e^2 + 2m_0c^2U_1e}}{ecx_1} = 0{,}116\ \mathrm{T}\,.$$

4 body

b) Ze vztahu (1) plyne

$$\left(\frac{x_\mathrm{max}}{x_1}\right)^2 = \frac{E_\mathrm{k\,max}^2 + 2m_0c^2E_\mathrm{k\,max}}{E_\mathrm{k1}^2 + 2m_0c^2E_\mathrm{k1}}\,,$$

$$E_\mathrm{k\,max}^2 + 2m_0c^2E_\mathrm{k\,max} - \left(\frac{x_\mathrm{max}}{x_1}\right)^2\left(E_\mathrm{k1}^2 + 2m_0c^2E_\mathrm{k1}\right) = 0\,.$$

Úloze vyhovuje kladný kořen této kvadratické rovnice

$$E_\mathrm{k\,max} = -m_0c^2 + \sqrt{m_0^2c^4 + \left(\frac{x_\mathrm{max}}{x_1}\right)^2\left(E_\mathrm{k1}^2 + 2m_0c^2E_\mathrm{k1}\right)} =$$

$$= -m_0c^2 + \sqrt{m_0^2c^4 + \left(\frac{x_\mathrm{max}}{x_1}\right)^2\left(U_1^2e^2 + 2m_0c^2U_1e\right)}\,.$$

Po dosazení $E_\mathrm{k\,max} = 1{,}04 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{J} = 6{,}5\ \mathrm{MeV}$.

4 body

c) Ze vztahu

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

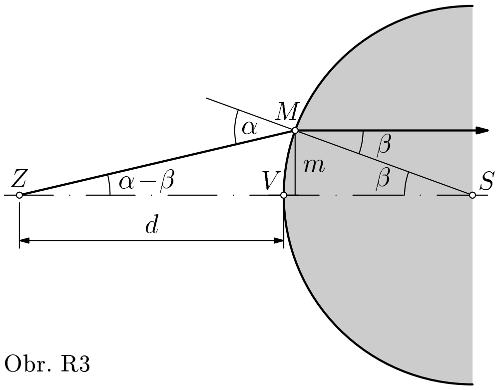
odvodíme

$$v = c\sqrt{1 - \frac{m_0^2}{m^2}} = c\sqrt{1 - \frac{m_0^2}{\left(m_0 + \frac{E_\mathrm{k}}{c^2}\right)^2}} = c\sqrt{1 - \frac{m_0^2 c^4}{\left(m_0 c^2 + E_\mathrm{k}\right)^2}}\,,$$

$$v_\mathrm{max} = c\sqrt{1 - \frac{m_0^2 c^4}{\left(m_0 c^2 + E_\mathrm{k\,max}\right)^2}} = 0{,}9973c = c - 8{,}0 \cdot 10^5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}\,.$$

2 body

4. a) Vyjdeme ze zákona lomu a z obr. R3. Pro paprsek, který se láme v malé vzdálenosti $m \ll r$ od optické osy můžeme psát



Obr. R3

$$\alpha - \beta \approx \frac{m}{d}\,, \qquad \beta \approx \frac{m}{r}\,,$$

$$\alpha = \frac{m}{d} + \frac{m}{r} \approx n\beta = n\frac{m}{r}\,,$$

Z toho

$$\frac{1}{d} = (n-1)\frac{1}{r}\,, \qquad r = (n-1)d\,.$$

3 body

b) Vyjdeme z obr. R4. Světlo, které se láme v bodě $M = [x, y]$ má v tomto místě stejnou fázi jako světlo, které současně dorazilo do bodu $M_1 = [x, 0]$ na optické ose. Z rovnosti optických drah ZM a ZVM_1 plyne

$$\sqrt{(x+d)^2 + y^2} = d + nx\,.$$

Úpravami dostaneme

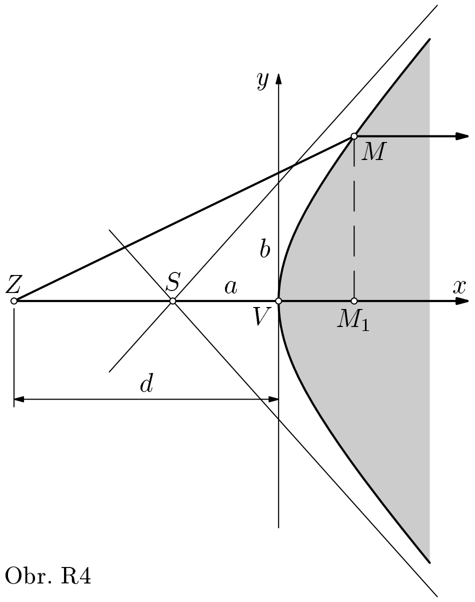
$$(n^2-1)x^2 + 2d(n-1)x - y^2 = 0\,, \tag{1}$$

$$x^2 + \frac{2d}{n+1}x + \frac{d^2}{(n+1)^2} - \frac{y^2}{n^2-1} = \frac{d^2}{(n+1)^2}\,,$$

$$\frac{\left(x + \dfrac{d}{n+1}\right)^2}{\left(\dfrac{d}{n+1}\right)^2} - \frac{y^2}{\dfrac{d^2(n-1)}{n+1}} = 1\,. \tag{2}$$

Jedná se o rovnici hyperboly se středem $S = \left[-\dfrac{d}{n+1}, 0\right]$, délkou hlavní poloosy $a = \dfrac{d}{n+1}$ a délkou vedlejší poloosy $b = d\sqrt{\dfrac{n-1}{n+1}}$. Poloměr křivosti v hlavním vrcholu $r = \dfrac{b^2}{a} = d(n-1)$ je stejný jako poloměr kulové plochy v úloze a).

4 body



Obr. R4

c) Dosazením $y = \varrho$ do (1) dostaneme kvadratickou rovnici

$$(n^2 - 1)x^2 + 2d(n-1)x - \varrho^2 = 0\,,$$

ze které můžeme vypočítat výšky vrchlíků ohraničujících kondenzor. Vyhovuje kořen

$$x = \frac{-\,d(n-1) + \sqrt{d^2(n-1)^2 + (n^2-1)\varrho^2}}{n^2 - 1}\,.$$

Pro $d_1 = 12$ mm vychází $x_1 = 17{,}6$ mm,
pro $d_2 = 120$ mm vychází $x_2 = 4{,}8$ mm.

3 body