Řešení úloh regionálního kola 46. ročníku fyzikální olympiády.

Kategorie A

Autoři úloh: Z. Polák (1), P. Šedivý (2, 3, 4)

1.a) Jde o izotermický děj, kdy se zachová součin objemu a tlaku:

$$p_{\mathrm{a}}SH = [p_{\mathrm{a}} + (H - d)\varrho g](H - d)S\,,$$

kde S je plošný obsah průřezu trubice. Úpravou dostaneme kvadratickou rovnici

$$d^2\varrho g - (2H\varrho g + p_{\mathrm{a}})d + H^2\varrho g = 0\,,$$

která má dva kořeny

$$d_{1,2} = H + \frac{p_{\mathrm{a}} \pm \sqrt{p_{\mathrm{a}}^2 + 4H\varrho g p_{\mathrm{a}}}}{2\varrho g}\,,$$

v úvahu však připadá jen ten, kdy $d < H$:

$$d = H + \frac{p_{\mathrm{a}} - \sqrt{p_{\mathrm{a}}^2 + 4H\varrho g p_{\mathrm{a}}}}{2\varrho g}\,. \tag{1}$$

Po dosazení: $d_1 = 83\,\mathrm{mm}$ pro vodu, $d_2 = 431\,\mathrm{mm}$ pro rtuť. **2 body**

b) Jde opět o izotermický děj a tedy

$$(p_{\mathrm{a}} - h\varrho g)(H - h) = (p_{\mathrm{a}} + h\varrho g)(H - h - \Delta h)\,.$$

Z toho po úpravě

$$\Delta h = \frac{2h\varrho g(H - h)}{h\varrho g + p_{\mathrm{a}}}\,. \tag{2}$$

Po dosazení: $\Delta h_1 = 17{,}5\,\mathrm{mm}$ pro vodu, $\Delta h_2 = 211\,\mathrm{mm}$ pro rtuť. **2 body**

c) Nahradíme ve vztahu (2) proměnné Δh a h proměnnými Δx a x:

$$\Delta x = \frac{2h\varrho g(H - x)}{x\varrho g + p_{\mathrm{a}}}\,. \tag{3}$$

Nyní hledáme maximum funkce Δx v závislosti na x. Maximum nalezneme z první derivace funkce Δx:

$$(\Delta x)' = 2\varrho g \cdot \frac{-\,\varrho g x^2 - 2p_{\mathrm{a}}x + p_{\mathrm{a}}H}{(x\varrho g + p_{\mathrm{a}})^2}\,. \tag{4}$$

První derivaci položíme rovnu 0:

$$\varrho g x^2 + 2p_\mathrm{a}x - p_\mathrm{a}H = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{-\,p_\mathrm{a} \pm \sqrt{p_\mathrm{a}^2 + H\varrho g p_\mathrm{a}}}{\varrho g}\,.$$

Protože x musí být kladné, připadá v úvahu pouze kořen

$$x = \frac{-\,p_\mathrm{a} + \sqrt{p_\mathrm{a}^2 + H\varrho g p_\mathrm{a}}}{\varrho g}\,. \tag{5}$$

V okolí tohoto nulového bodu je první derivace (4) klesající funkce, proto funkce (3) dosahuje maxima.
Po dosazení: $x_1 = 0{,}488$ m pro vodu, $x_2 = 0{,}396$ m pro rtuť. **3 body**
Po dosazení z (5) za x do (3) a úpravě dostaneme

$$\Delta x = 2H + 4\frac{p_\mathrm{a}}{\varrho g} - 4\sqrt{\left(\frac{p_\mathrm{a}}{\varrho g}\right)^2 + \frac{Hp_\mathrm{a}}{\varrho g}}\,.$$

Po dosazení: $\Delta x_1 = 47$ mm pro vodu, $\Delta x_2 = 417$ mm pro rtuť. **3 body**

Poznámky

1. Úprava výrazu (3) po dosazení z (5) se dá zjednodušit zavedením substituce $u = \dfrac{p_\mathrm{a}}{\varrho g}$. Pak

$$\Delta x = 2\frac{Hx - x^2}{x + u} \quad \text{a} \quad x = -u + \sqrt{u^2 + Hu}\,,$$

$$\Delta x = 2\frac{H(-u + \sqrt{u^2 + Hu} - u^2 + 2u\sqrt{u^2 + Hu} - u^2 - Hu}{u - u + \sqrt{u^2 + Hu}} =$$

$$= 2\frac{-\,2Hu - 2u^2 + \sqrt{u^2 + Hu}(2u + H)}{\sqrt{u^2 + Hu}} =$$

$$= 2H + 4u - 4\sqrt{u^2 + Hu} = 2H + 4\frac{p_\mathrm{a}}{\varrho g} - 4\sqrt{\left(\frac{p_\mathrm{a}}{\varrho g}\right)^2 + \frac{Hp_\mathrm{a}}{\varrho g}}\,.$$

2. Pokud řešitel neprovede obecnou úpravu dosazením výrazu (5) do (3), ale dosadí jen číselnou hodnotu vypočítanou z (5), strhává se 1 bod.

2.a) Označme U_1 až U_5 napětí na jednotlivých kondenzátorech podle obr. R1. Příslušné náboje na kondenzátorech označme Q_1 až Q_5. Ze zákona zachování náboje plyne

$$Q_1 + Q_3 = Q_2 + Q_4\,, \qquad Q_2 - Q_1 + Q_5 = 0\,.$$

Dále platí:

$$U_1 + U_5 - U_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{Q_1}{C} + \frac{Q_5}{5C} - \frac{Q_3}{3C} = 0 \quad \Rightarrow \quad 15Q_1 + 3Q_5 - 5Q_3 = 0\,,$$

$$U_2 - U_5 - U_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{Q_2}{2C} - \frac{Q_5}{5C} - \frac{Q_4}{4C} = 0 \quad \Rightarrow \quad 10Q_2 - 4Q_5 - 5Q_4 = 0\,,$$

$$U_1 + U_2 = U \quad \Rightarrow \quad \frac{Q_1}{C} + \frac{Q_2}{2C} = U \quad \Rightarrow \quad 2Q_1 + Q_2 = 2UC\,.$$

3 body

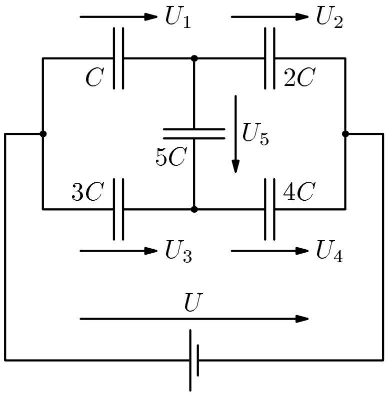
Dostali jsme soustavu pěti rovnic, jejímž řešením dostaneme

$$Q_1 = \frac{44}{71}UC,\ Q_2 = \frac{54}{71}UC,\ Q_3 = \frac{126}{71}UC,\ Q_4 = \frac{116}{71}UC,\ Q_5 = -\frac{10}{71}UC.$$

Příslušná napětí na kondenzátorech jsou

$$U_1 = \frac{44}{71}U,\ U_2 = \frac{27}{71}U,\ U_3 = \frac{42}{71}U,\ U_4 = \frac{29}{71}U,\ U_5 = -\frac{2}{71}U.$$

3 body



Obr. R1

b) Energie kondenzátorů jsou v poměru

$\frac{1}{2}CU_1^2 : \frac{1}{2}2CU_2^2 : \frac{1}{2}3CU_3^2 : \frac{1}{2}4CU_4^2 : \frac{1}{2}5CU_5^2 = 1936 : 1458 : 5292 : 3364 : 20.$

Největší energii má kondenzátor o kapacitě $3C$. **2 body**

c) Aby se soustava kondenzátoru nabila na celkové napětí U, musí zdroj dodat náboj

$$Q = Q_1 + Q_3 = Q_2 + Q_4 = \frac{170}{71}CU\,.$$

Celková kapacita soustavy je tedy

$$C_\mathrm{v} = \frac{Q}{U} = \frac{170}{71}C \doteq 2{,}39C\,.$$

2 body

3. a) Pohyb soustavy v krátkém časovém intervalu probíhá jako rotace okolo okamžitého pólu P, který nalezneme na kolmicích vedených body A a B ke směrům jejich okamžitých rychlostí (obr. R2). Platí

$$|PA| = l \operatorname{tg} 30^\circ = l/\sqrt{3}\,.$$

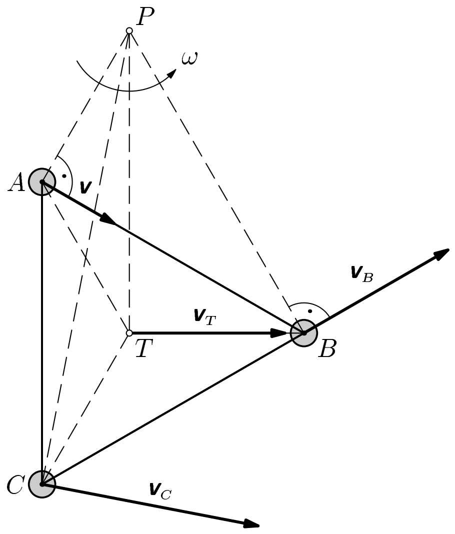
Rychlost každého bodu soustavy je kolmá k jeho spojnici s bodem P a její velikost je přímo úměrná vzdálenosti od bodu P. Platí

$$|PB| = \frac{l}{\cos 30^\circ} = \frac{2l}{\sqrt{3}}\,, \quad |PC| = \sqrt{\frac{l^2}{3} + l^2 - 2l\frac{l}{\sqrt{3}}\cos 150^\circ} = l\sqrt{\frac{7}{3}}\,,$$

$$|PT| = \sqrt{\frac{l^2}{3} + \frac{l^2}{3} - 2\frac{l^2}{3}\cos 120^\circ} = l\,,$$

$$v_B = v \cdot \frac{|PB|}{|PA|} = 2v\,, \qquad v_C = v \cdot \frac{|PC|}{|PA|} = v\sqrt{7}\,, \qquad v_T = v \cdot \frac{|PT|}{|PA|} = v\sqrt{3}\,.$$

4 body



Obr. R2

b) Soustava se v daném okamžiku otáčí okolo pólu P v kladném smyslu úhlovou rychlostí

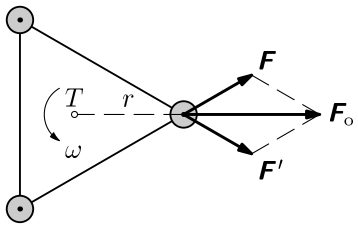
$$\omega = \frac{v}{|PA|} = \frac{v\sqrt{3}}{l}\,.$$

2 body

c) Soustava se při pohybu chová jako izolované tuhé těleso. Jeho pohyb je složen z rovnoměrného přímočarého pohybu těžiště rychlostí $\boldsymbol{v}_T$ a rovnoměrného otáčivého pohybu okolo těžiště úhlovou rychlostí ω. V neinerciální vztažné soustavě s počátkem v těžišti a spojené se soustavou působí na koule odstředivé síly o velikosti $F_\mathrm{o} = m\omega^2 r,$ které se rozkládají na tahové síly napínající dráty. Jejich velikost je

$$F = \frac{F_\mathrm{o}}{2\cos 30^\circ} = \frac{m \cdot \dfrac{3v^2}{l^2} \cdot \dfrac{l}{\sqrt{3}}}{2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{mv^2}{l}\,.$$

4 body



Obr. R3

4. Vztažnou soustavu (O, x, y, z, t) spojenou s planetkou označme S, vztažnou soustavu (O', x', y', z', t') spojenou s kosmickou lodí označme S$'$. Dále označme

x_1, x_2 ... souřadnice obou děl v soustavě S, přičemž $x_1 < x_2$
x'_1, x'_2 ... souřadnice obou průstřelů v soustavě S$'$
$t_1 = t_2 = t$ ... čas měřený v soustavě S, kdy došlo (podle dělostřelců) k oběma zásahům
t'_1, t'_2 ... časy, které v okamžicích zásahu naměřila posádka lodi
$l = x_2 - x_1$ ... vzálemná vzdálenost děl naměřená v soustavě S (klidová délka úsečky)
$L = x'_2 - x'_1$ ... vzájemná vzdálenost průstřelů změřená posádkou lodi (klidová délka úsečky)
l' ... vzájemná vzdálenost děl vypočítaná posádkou lodi

a) Ve vztažné soustavě S dělostřelci registrují oba zásahy jako dvě současné události $U_1 = (x_1, t)$, $U_2 = (x_2, t)$ (obr. R4). Vzájemná vzdálenost obou míst zásahu a tedy i vzdálenost průstřelů boku lodi je podle dělostřelců $x_2 - x_1 = l$, stejná jako klidová vzdálenost obou děl. **1 bod**

b) Ve vztažné soustavě S$'$ zaregistruje posádka lodi obě události jako $U'_1 = (x'_1, t'_1)$, $U'_2 = (x'_2, t'_2)$ (obr. 5a,b). Užitím Lorentzovy transformace

$$x'_1 = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad x'_2 = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

dojdeme ke vztahu

$$L = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - 1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Numericky $L = 1{,}25\, l = 25$ m. **3 body**

c) Podle hodin na kosmické lodi došlo k zásahům v časech

$$t'_1 = \frac{t - \frac{v}{c^2} x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad t'_2 = \frac{t - \frac{v}{c^2} x_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Protože $x_2 > x_1$, platí $t'_2 < t'_1$. Podle posádky lodi uplynula mezi oběma událostmi doba

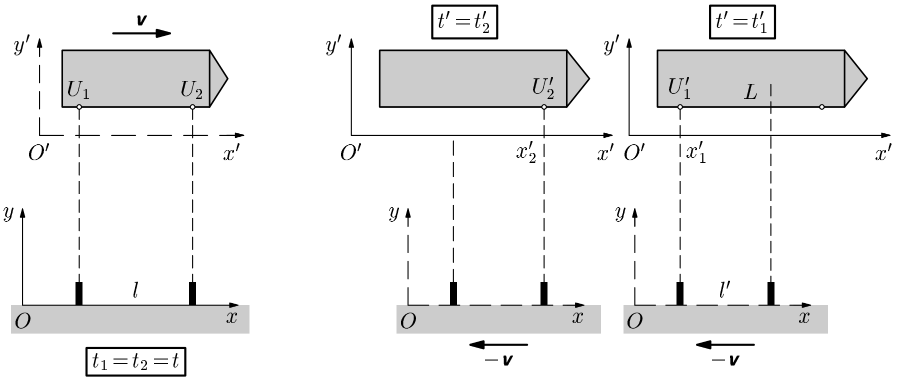
$$\Delta t' = t'_1 - t'_2 = \frac{(x_2 - x_1)\dfrac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{l\dfrac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}\,.$$

Numericky $\Delta t' = 5{,}0 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{s} = 50\ \mathrm{ns}$. **3 body**

Z toho vypočítá posádka kosmické lodi vzájemnou vzdálenost obou děl na planetce, jak se jeví ve vztažné soustavě S′:

$$l' = L - v\Delta t' = \frac{l}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} - \frac{l\dfrac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = l\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,.$$

Numericky $l' = 0{,}8l = 16\ \mathrm{m}$. **3 body**



Obr. R4 Obr. R5a Obr. R5b