Řešení úloh 1. kola 46. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie A*

Autoři úloh: L. Richterek (1, 7), P. Šedivý (3, 4, 6), M. Jarešová (2), J. Jírů (5)
Konečná úprava P. Šedivý

1. a) Na obr. R1 je M poloha mravence v čase t: Z podobnosti trojúhelníků MNB a AOB plyne

$$\frac{|NB|}{|MB|} = \frac{|OB|}{|AB|}, \quad \text{neboli} \quad \frac{vt - x}{ut} = \frac{vt}{L} \quad \Rightarrow \quad x = vt - \frac{uv}{L}t^2 .$$

Dostali jsme kvadratickou funkci v proměnné t se záporným koeficientem u kvadratického členu, která je rovna nule pro $t = 0$ a pro $t = L/u$. V čase $t = t_1 = \dfrac{L}{2u}$ tedy dosáhne maxima

$$x_{\max} = v\frac{L}{2u} - \frac{uv}{L} \cdot \frac{L^2}{4u^2} = L\frac{v}{4u} .$$

Tento výsledek vyhovuje úloze, pokud $t_1 \leq L/v$. Jestliže $t_1 > L/v$, tj. $u < v/2$, vzdaluje se mravenec od stěny po celou dobu pohybu tyče a v čase $t = L/v$ dosáhne maximální vzdálenosti od stěny

$$x_{\max} = v\frac{L}{v} - \frac{uv}{L} \cdot \frac{L^2}{v^2} = L\left(1 - \frac{u}{v}\right) .$$

3 body

b) Z podobnosti trojúhelníků MNB a AOB dále plyne

$$\frac{|MN|}{|MB|} = \frac{|AO|}{|AB|}, \quad \text{neboli} \quad \frac{y}{ut} = \frac{\sqrt{L^2 - v^2t^2}}{L} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{ut}{L}\sqrt{L^2 - v^2t^2} .$$

Dostali jsme funkci, která je v čase $t = 0$ a v čase $t = L/v$ nulová. V intervalu $(0, L/v)$ je spojitá a kladná. Maxima dosahuje , když

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{u}{L} \cdot \frac{L^2 - 2v^2t^2}{\sqrt{L^2 - v^2t^2}} = 0 ,$$

tj. v čase $t = t_2 = \dfrac{L}{v\sqrt{2}}$. Maximum má hodnotu

$$y_{\max} = \frac{uL}{Lv\sqrt{2}}\sqrt{L^2 - v^2\frac{L^2}{2v^2}} = L\frac{u}{2v} .$$

Tento výsledek vyhovuje úloze, pokud $t_2 \leq L/u$, tj. $u \leq v\sqrt{2}$. Jestliže $u > v\sqrt{2}$, stoupá mravenec po celou dobu lezení a na konci tyče dosáhne výšky

$$y_{\max} = \frac{uL}{uL}\sqrt{L^2 - v^2\frac{L^2}{u^2}} = L\sqrt{1 - \frac{v^2}{u^2}} .$$

3 body

c) Pro vzdálenost mravence od podlahové lišty platí $r^2 = x^2 + y^2$, tj.

$$r^2 = \left(vt - \frac{uv}{L}t^2\right)^2 + \left(\frac{ut}{L}\sqrt{L^2 - v^2t^2}\right)^2 = t^2(u^2+v^2) - \frac{2uv^2}{L}t^3\,, \tag{1}$$

přičemž $t \leq L/u \ \wedge \ t \leq L/v$. Dostali jsme kubickou funkci, jejíž extrém vyšetříme pomocí jejich derivací:

$$\frac{\mathrm{d}(r^2)}{\mathrm{d}t} = 2(u^2+v^2)t - \frac{6uv^2t^2}{L}\,, \qquad \frac{\mathrm{d}^2(r^2)}{\mathrm{d}t^2} = 2(u^2+v^2) - \frac{12uv^2t}{L}\,.$$

První derivace funkce (1) je rovna nule pro $t = 0$ a pro $t = \dfrac{L(u^2+v^2)}{3uv^2}$. Druhá derivace je pro $t < \dfrac{L(u^2+v^2)}{6uv^2}$ kladná, pro $t > \dfrac{L(u^2+v^2)}{6uv^2}$ záporná. Funkce (1) tedy dosahuje pro $t = 0$ lokálního minima a pro $t = t_3 = \dfrac{L(u^2+v^2)}{3uv^2}$ lokálního maxima

$$(r_{\max})^2 = L^2\frac{(u^2+v^2)^3}{27u^2v^4}\,, \qquad \text{tedy} \qquad r_{\max} = L\frac{u^2+v^2}{3uv^2}\sqrt{\frac{u^2+v^2}{3}}\,. \tag{2}$$

Tento výsledek vyhovuje úloze, pokud $t_3 < L/v$, tj.

$$u^2 + v^2 - 3uv < 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{u}{v}\right)^2 - 3\frac{u}{v} + 1 < 0\,,$$

$$0{,}382 \doteq \frac{3-\sqrt{5}}{2} < \frac{u}{v} < \frac{3+\sqrt{5}}{2} \doteq 2{,}62\,.$$

Současně musí platit $t_3 < L/u$, tj.

$$u^2 + v^2 < 3v^2\,, \quad \Rightarrow \quad u < v\sqrt{2} \doteq 1{,}41v\,.$$

Platnost výsledku (2) je tedy omezena podmínkou

$$v\frac{3-\sqrt{5}}{2} < u < v\sqrt{2}\,.$$

Pro $u < v\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ leze mravenec pomalu, jeho vzdálenost od lišty se během pohybu tyče stále zvětšuje a v čase $t = L/v$ dosáhne maxima

$$r_{\max}^2 = (u^2+v^2)\frac{L^2}{v^2} - \frac{2uv^2L^3}{v^3L} = L^2\left(1 - \frac{u}{v}\right)^2, \quad r_{\max} = L\left(1 - \frac{u}{v}\right) = x_{\max}\,.$$

Pro $u > v\sqrt{2}$ leze mravenec rychle, jeho vzdálenost od lišty se během jeho pohybu po tyči stále zvětšuje a v čase $t = L/u$ dosáhne maxima

$$r_{\max}^2 = (u^2+v^2)\frac{L^2}{u^2} - \frac{2uv^2L^3}{u^3L} = L^2\left(1-\frac{v^2}{u^2}\right), \quad r_{\max} = L\sqrt{1-\frac{v^2}{u^2}} = y_{\max}\,.$$

4 body

Alternativní řešení úlohy b)
Vyjdeme z obr. R2: Z podobnosti trojúhelníků MNB a OPB plyne

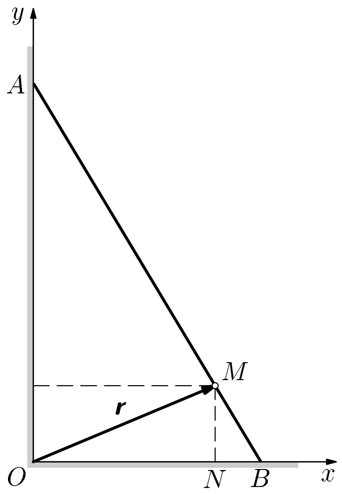
$$\frac{|MN|}{|MB|} = \frac{|OP|}{|OB|}, \quad \text{neboli} \quad \frac{y}{ut} = \frac{H}{vt} \quad \Rightarrow \quad y = H\frac{u}{v}\,,$$

kde H je vzdálenost tyče od podlahové lišty. V rovnoramenném trojúhelníku OSB (S je střed tyče) je H výškou na rameno. Maximální velikost $H_{\max} = L/2$ má v okamžiku, kdy je tyč skloněna o $45°$ a trojúhelník OSB je pravoúhlý. V tomto okamžiku je

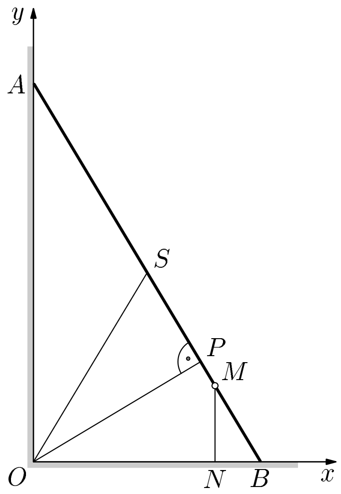
$$y = y_{\max} = H_{\max}\frac{u}{v} = L\frac{u}{2v}\,.$$

Popsaná situace musí ovšem nastat nejpozději v okamžiku, kdy mravenec doleze na konec tyče, tj. $L/u \geq L/(v\sqrt{2})$, $u \leq v\sqrt{2}$. V opačném případě bude mravenec nejvýše v okamžiku, kdy dorazí na konec tyče a

$$y_{\max} = \sqrt{L^2 - v\left(\frac{L}{u}\right)^2} = L\sqrt{1-\frac{v^2}{u^2}}\,.$$



Obr. R1



Obr. R2

2. a) Počátek vztažné soustavy zvolíme na vrcholu pyramidy, osu x kolmo k podstavné hraně, kladnou poloosu y svisle vzhůru. Jedná se o vrh šikmý vzhůru s počáteční rychlostí $\boldsymbol{v}_0$ a elevačním úhlem α. Platí:

$$x = v_0 t \cos\alpha\,, \qquad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2\,.$$

Po vyloučení t a úpravě pomocí vztahu $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha$ dostaneme

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2}(1 + \operatorname{tg}^2\alpha) = -\frac{gx^2}{2v_0^2} + x\operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2}\operatorname{tg}^2\alpha\,. \tag{1}$$

Souřadnice bodu dopadu na pobočné stěně splňují podmínku $y = -x\operatorname{tg}\beta$, kde β je úhel sklonu pobočné stěny pyramidy, $\operatorname{tg}\beta = \sqrt{2}$. Dosazením do (1) a úpravou dostaneme rovnici

$$\frac{gx^2}{2v_0^2}\operatorname{tg}^2\alpha - x\operatorname{tg}\alpha + \frac{gx^2}{2v_0^2} - x\operatorname{tg}\beta = 0\,. \tag{2}$$

2 body

Z této kvadratické rovnice pro $\operatorname{tg}\alpha$ můžeme vypočítat ke zvolené souřadnici x bodu dopadu příslušný elevační úhel vrhu.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x \pm \sqrt{D}}{\dfrac{gx^2}{v_0^2}}\,, \qquad D = x^2 - \frac{g^2x^4}{v_0^4} + \frac{2gx^3\operatorname{tg}\beta}{v_0^2}\,. \tag{3}$$

Pro nejvzdálenější bod dopadu má rovnice jediné řešení a diskriminant rovnice je roven nule:

$$D = x^2\left(1 - \frac{g^2x^2}{v_0^4} + \frac{2gx\operatorname{tg}\beta}{v_0^2}\right) = 0\,, \quad \text{přičemž} \quad x \neq 0\,,$$

$$x = \frac{\dfrac{2g\operatorname{tg}\beta}{v_0^2} \pm \sqrt{\dfrac{4g^2\operatorname{tg}^2\beta}{v_0^4} + \dfrac{4g^2}{v_0^4}}}{\dfrac{2g^2}{v_0^4}} = \frac{v_0^2}{g}(\operatorname{tg}\beta \pm \sqrt{\operatorname{tg}^2\beta + 1})\,.$$

Úloze vyhovuje kladný kořen

$$x = \frac{v_0^2}{g}\left(\operatorname{tg}\beta + \sqrt{\operatorname{tg}^2\beta + 1}\right) = \frac{v_0^2}{g}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 72{,}2\ \mathrm{m}\,. \tag{4}$$

Přitom podle (3)

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x + 0}{\dfrac{gx^2}{v_0^2}} = \frac{v_0^2}{gx} = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \sqrt{3} - \sqrt{2} = 0{,}31784\,, \qquad \alpha = 17{,}6^\circ\,. \tag{5}$$

Při dané velikosti počáteční rychlosti můžeme dohodit nejdál do vzdálenosti $x/\cos\beta = x\sqrt{3} = 125$ m od vrcholu pyramidy, zvolíme-li elevační úhel 17,6°.

3 body

b) Střed podstavné hrany pyramidy má souřadnici $x = h/\sqrt{2}$. Výsledek (5) nezávisí na velikosti počáteční rychlosti. Proto i střed podstavné hrany zasáhneme s nejmenší počáteční rychlostí vrhu při elevačním úhlu určeném v úkolu a). Podle (4) pak

$$\frac{h}{\sqrt{2}} = \frac{v_{0\min}^2}{g}(\sqrt{2}+\sqrt{3})\,, \qquad v_{0\min}^2 = \frac{gh}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3})} = gh\left(\frac{\sqrt{6}}{2}-1\right)\,,$$

$$v_{0\min} = \sqrt{gh\left(\frac{\sqrt{6}}{2}-1\right)} = 18{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

2 body

c) Vztažnou soustavu změníme tak, že osa x bude mít směr úhlopříčky podstavy. Dosadíme-li do rovnice (1) souřadnice bodu dopadu $[h, -h]$, dostaneme po úpravě kvadratickou rovnici pro $\operatorname{tg}\alpha$ s parametrem v_0

$$\frac{gh^2}{2v_0^2}\operatorname{tg}^2\alpha - h\operatorname{tg}\alpha + \frac{gh^2}{2v_0^2} - h = h\left(\frac{gh}{2v_0^2}\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}\alpha + \frac{gh}{2v_0^2} - 1\right) = 0\,,$$

Z toho $\quad \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1 \pm \sqrt{D}}{\dfrac{gh}{v_0^2}}\,, \qquad D = 1 + \dfrac{2gh}{v_0^2} - \dfrac{g^2h^2}{v_0^4}$. Minimální velikost rychlosti je taková, pro kterou má rovnice jediné řešení, tj.

$$D = 0 \quad \Rightarrow \quad v_0^4 + 2ghv_0^2 - g^2h^2 = 0\,,$$

$$v_0^2 = \frac{-2gh \pm \sqrt{4g^2h^2 + 4g^2h^2}}{2} = gh(-1 \pm \sqrt{2})\,.$$

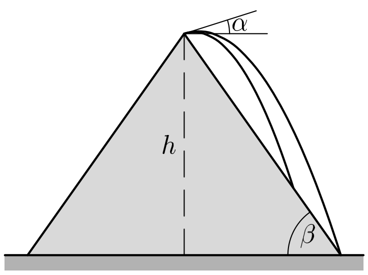
Úloze vyhovuje kořen

$$v_{0\min}^2 = gh(\sqrt{2}-1)\,, \qquad v_{0\min} = \sqrt{gh(\sqrt{2}-1)} = 24{,}4\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

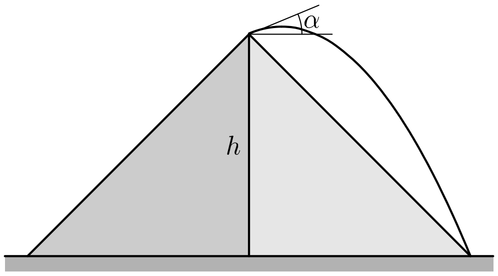
Pak $\quad \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1+0}{\dfrac{gh}{v_{0\min}^2}} = \dfrac{v_{0\min}^2}{gh} = \sqrt{2}-1\,, \quad \alpha = 22{,}5^\circ\,.$

3 body

Trajektorie vrhů, které jsou řešením úlohy, jsou v měřítku 1:5000 nakresleny na obr. R3 a R4.



Obr. R3



Obr. R4

Alternativní řešení úkolů a) a c) užitím diferenciálního počtu

a) Rovnici (2) upravíme na tvar:

$$x^2\frac{g(1+\operatorname{tg}^2\alpha)}{2v_0^2}-x(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)=x\left(x\frac{g(1+\operatorname{tg}^2\alpha)}{2v_0^2}-\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta\right)=0\,.$$

Kořen $x=0$ je souřadnice počátku vrhu, bod dopadu má souřadnici

$$x=\frac{2v_0^2(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)}{g(1+\operatorname{tg}^2\alpha)}\,. \tag{6}$$

Provedením substituca $\operatorname{tg}\alpha=z$ dostaneme vztah

$$x=\frac{2v_0^2}{g}\cdot\frac{z+\operatorname{tg}\beta}{1+z^2}\,, \tag{7}$$

který zderivujeme a derivaci položíme rovnu nule:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}=\frac{2v_0^2}{g}\cdot\frac{1+z^2-(z+\operatorname{tg}\beta)2z}{(1+z^2)^2}=\frac{2v_0^2}{g}\cdot\frac{1-2z\operatorname{tg}\beta-z^2}{(1+z^2)^2}=0\,. \tag{8}$$

Z toho

$$z^2+2z\operatorname{tg}\beta-1=0\,,\qquad z=\frac{-2\operatorname{tg}\beta\pm\sqrt{4\operatorname{tg}^2\beta+4}}{2}=-\operatorname{tg}\beta\pm\sqrt{\operatorname{tg}^2\beta+1}\,.$$

Úloze vyhovuje kořen $z_1=\operatorname{tg}\alpha=-\operatorname{tg}\beta+\sqrt{\operatorname{tg}^2\beta+1}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$. Druhý kořen $z_2=-\sqrt{2}-\sqrt{3}$ nevyhovuje rovnici (6), neboť výraz na pravé straně by byl záporný. Funkce (7) je kladná v intervalu $(-\operatorname{tg}\beta,\infty)$. V bodě $-\operatorname{tg}\beta$ je rovna nule a také limita pro $z\to\infty$ je rovna 0. Proto v bodě z_1 dosahuje maxima. Podle (6)

$$x_{\max}=\frac{2v_0^2}{g}\cdot\frac{\sqrt{3}}{1+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}=\frac{2v_0^2}{g}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6-2\sqrt{6}}=\frac{v_0^2}{g}(\sqrt{3}+\sqrt{2})\,.$$

c) Do rovnice (1) dosadíme souřadnice bodu dopadu $[h, -h]$ a dostaneme rovnici

$$-h = h \operatorname{tg}\alpha - \frac{gh^2}{2v_0^2}(1+\operatorname{tg}^2\alpha)\,, \tag{9}$$

ze které vyjádříme v_0^2 jako funkci $\operatorname{tg}\alpha$. Provedeme substituci $\operatorname{tg}\alpha = z$, výraz zderivujeme podle z a derivaci položíme rovnu nule:

$$v_0^2 = \frac{gh}{2}\cdot\frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha} = \frac{gh}{2}\cdot\frac{1+z^2}{1+z}\,, \tag{10}$$

$$\frac{\mathrm{d}(v_0^2)}{\mathrm{d}z} = \frac{gh}{2}\cdot\frac{2z(1+z)-1-z^2}{(1+z)^2} = \frac{gh}{2}\cdot\frac{z^2+2z-1}{(1+z)^2} = 0\,, \tag{11}$$

$$z^2+2z-1=0\,, \qquad z = \frac{-2\pm\sqrt{8}}{2} = -1\pm\sqrt{2}\,.$$

Úloze vyhovuje kořen $z_1 = \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}-1$. Druhý kořen $z_2 = -\sqrt{2}-1$ nevyhovuje rovnici (10), neboť výraz na pravé straně by byl záporný. Funkce (10) je kladná v intervalu $(-1, \infty)$. V bodech -1 a ∞ má nevlastní limitu ∞. Proto v bodě z_1 dosahuje v_0^2 minima. Dosazením do (10) dostaneme

$$v_{0\min}^2 = \frac{gh}{2}\cdot\frac{1+(\sqrt{2}-1)^2}{\sqrt{2}} = gh(\sqrt{2}-1)\,.$$

3. a) Zvolme vztažnou soustavu spojenou s rotující nádobou. Působením třecích sil se voda v nádobě uvede do otáčivého pohybu, jehož úhlová rychlost je stejná jako úhlová rychlost nádoby. Hladina vody zaujme tvar rotační plochy. Její *meridián* má rovnici $y = y(x)$, kde x je vzdálenost od osy otáčení. V každém bodu hladiny je tečná rovina kolmá na výslednici tíhové a setrvačné odstředivé síly, které zde působí na částici (obr. R5). S vodorovnou rovinou svírá úhel α, pro který platí

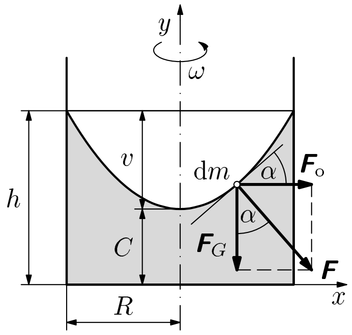
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}m\,\omega^2 x}{\mathrm{d}m\,g} = \frac{\omega^2 x}{g}\,.$$

Integrací dostaneme

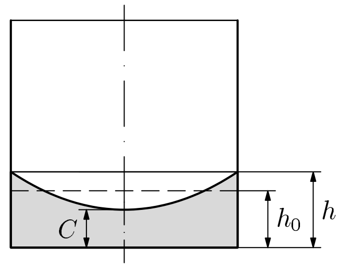
$$y = \int \frac{\omega^2 x}{g}\mathrm{d}x = \frac{\omega^2}{2g}x^2 + C\,. \tag{1}$$

Hladina zaujme tvar rotačního paraboloidu. Integrační konstanta $C = y(0)$ udává polohu vrcholu paraboloidu na ose.

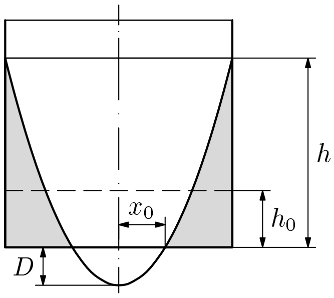
2 body



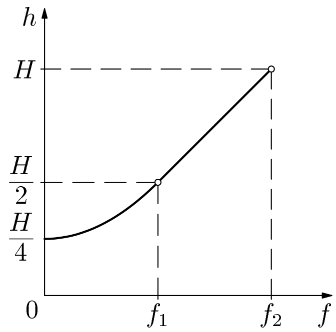
Obr. R5



Obr. R6



Obr. R7



Obr. R8

V dalším řešení použijeme pomocnou větu, kterou si jistě sami snadno odvodíte: Objem rotačního paraboloidu o výšce v a poloměru R (obr. R5) je

$$V = \frac{\pi R^2 v}{2}\,.$$

b, c) Pokud platí $f \leq f_1$, nastane situace podle obr. R6. Ze vztahu (1) odvodíme

$$h = y(R) = \frac{\omega^2 R^2}{2g} + C\,, \quad h - C = \frac{\omega^2 R^2}{2g}\,,$$

a vyjádříme objem kapaliny

$$V = \pi R^2 h_0 = \pi R^2 h - \frac{1}{2}\pi R^2 (h - C) = \pi R^2 h - \frac{1}{2}\pi R^2 \frac{\omega^2 R^2}{2g}\,.$$

Po úpravě dostaneme

$$h = h_0 + \frac{\omega^2 R^2}{4g} = \frac{H}{4} + \frac{\pi^2 R^2}{g} f^2\,. \tag{2}$$

Závislost výšky okraje hladiny na frekvenci je kvadratická. **2 body**

Hladina se dotkne dna, jestliže $C = 0$. V takovém případě

$$V = \pi R^2 h_0 = \frac{1}{2}\pi R^2 h\,, \quad h = 2h_0 = \frac{H}{2}\,, \quad f = f_1 = \frac{\sqrt{gH}}{2\pi R}\,.$$

2 body

d, e) Pro $f_1 \leq f < f_2$ nastane situace podle obr. R7 a integrační konstanta C je záporná. Pro větší přehlednost označme $-C = D$. Hladina protíná rovinu dna v kružnici o poloměru x_0. Platí

$$y = \frac{\omega^2 x^2}{2g} - D\,, \quad h + D = \frac{\omega^2 R^2}{2g}\,, \quad x_0^2 = \frac{2gD}{\omega^2}\,,$$

$$V = \pi R^2 h_0 = \pi R^2 h - \left(\frac{\pi R^2 (h+D)}{2} - \frac{\pi x_0^2 D}{2} \right) =$$

$$= \pi R^2 h - \frac{\pi R^4 \omega^2}{4g} + \frac{\pi g}{\omega^2} \left(\frac{\omega^2 R^2}{2g} - h \right)^2 = \frac{\pi g}{\omega^2} h^2\,,$$

$$h = 2\pi R \sqrt{\frac{h_0}{g}}\, f = \pi R \sqrt{\frac{H}{g}}\, f\,. \tag{3}$$

Výška okraje hladiny je přímo úměrná frekvenci. Horní podstavy válce dosáhne při frekvenci

$$f_2 = \frac{\sqrt{gH}}{\pi R} = 2 f_1\,.$$

2 body

f) Graf závislosti výšky okraje hladiny na frekvenci sestrojený na základě vztahů (2) a (3) je na obr. R8. **2 body**

4. a) Vyjdeme z obr. R9. Vzdálenost středu kuličky od středu koule je

$$r = \sqrt{(r_0 + l \sin\alpha)^2 + l^2 (1 - \cos\alpha)^2}\,.$$

Spojnice obou středů je odchýlena od vodorovného směru o úhel β, přičemž

$$\cos\beta = \frac{r_0 + l\sin\alpha}{r}\,, \qquad \sin\beta = \frac{l(1-\cos\alpha)}{r}\,.$$

Vlákno kyvadélka je napínáno silou, která je rovna výslednici $\boldsymbol{F}$ tíhové síly $\boldsymbol{F}_G$ a elektrostatické síly $\boldsymbol{F}_\mathrm{e}$, které působí na kuličku. Velikosti sil vypočítáme užitím sinové věty:

$$\frac{F_\mathrm{e}}{F_G} = \frac{\sin\alpha}{\sin(90^\circ + \beta - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}\,,$$

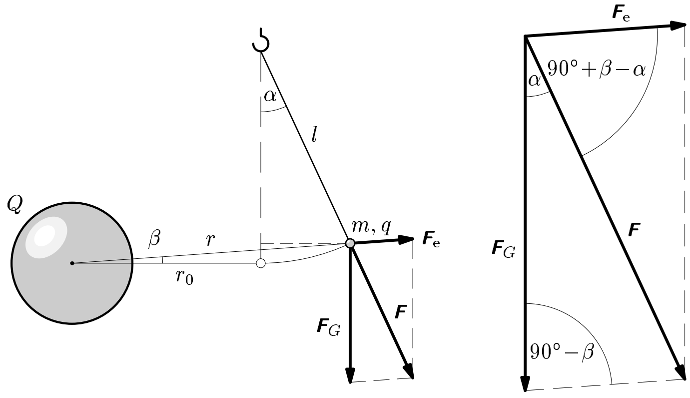
$$F_\mathrm{e} = \frac{mg\sin\alpha}{\dfrac{\cos\alpha(r_0 + l\sin\alpha)}{r} + \dfrac{l\sin\alpha(1-\cos\alpha)}{r}} = \frac{mgr\sin\alpha}{r_0\cos\alpha + l\sin\alpha} =$$

$$= \frac{mg\sin\alpha\sqrt{(r_0 + l\sin\alpha)^2 + l^2(1-\cos\alpha)^2}}{r_0\cos\alpha + l\sin\alpha} = 2{,}4 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{N}\,.$$

$$\frac{F}{F_G} = \frac{\sin(90^\circ - \beta)}{\sin(90^\circ + \beta - \alpha)} = \frac{\cos\beta}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}\,,$$

$$F = \frac{mg\dfrac{r_0 + l\sin\alpha}{r}}{\dfrac{\cos\alpha(r_0 + l\sin\alpha)}{r} + \dfrac{l\sin\alpha(1-\cos\alpha)}{r}} = \frac{mg(r_0 + l\sin\alpha)}{r_0\cos\alpha + l\sin\alpha} = 5{,}7\cdot 10^{-4}\ \mathrm{N}\,.$$

5 bodů



Obr. R9

b) Pro potenciál φ koule platí

$$\varphi = U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \qquad \text{Z toho} \qquad Q = 4\pi\varepsilon_0 RU = 4{,}9\cdot 10^{-8}\ \mathrm{C}\,.$$

2 body

c) Z b) plyne $\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0} = UR$. Náboj na kuličce kyvadélka určíme z Coulombova zákona:

$$F_\mathrm{e} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Qq}{r^2} = \frac{URq}{r^2}\,,$$

$$q = \frac{F_\mathrm{e} r^2}{UR} = \frac{mgr^3\sin\alpha}{UR(r_0\cos\alpha + l\sin\alpha)} =$$

$$= \frac{mg\sin\alpha\left((r_0 + l\sin\alpha)^2 + l^2(1-\cos\alpha)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{UR(r_0\cos\alpha + l\sin\alpha)} = 5{,}6\cdot 10^{-9}\ \mathrm{C}\,.$$

3 body

5. a) Za daných předpokladů jsou obě ramena O_1P_1 a O_2P_2 namáhána stejně. Můžeme je teoreticky nahradit jediným ramenem spojujícím střed úsečky O_1O_2 a těžiště kabiny s člověkem a pohyb obsazené kabiny vyšetřovat jako pohyb hmotného bodu o hmotnosti m, na který působí dvě síly – tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$ a reakce ramene $\boldsymbol{R}$ (obr. R10, R11). Jejich výslednice $\boldsymbol{F}$ uděluje kabině zrychlení

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{F}}{m} = \frac{\boldsymbol{F}_G + \boldsymbol{R}}{m} .$$

Tečná složka výslednice, která je současně tečnou složkou tíhové síly $\boldsymbol{F}_\mathrm{t} = \boldsymbol{F}_1$, uděluje kabině tečné zrychlení $\boldsymbol{a}_\mathrm{t}$

$$a_\mathrm{t} = \frac{F_1}{m} = \frac{mg\sin\varphi}{m} = g\sin\varphi .$$

Pro $0 < \varphi < 180°$ je tečné zrychlení kladné a rychlost kabiny se zvětšuje, pro $180° < \varphi < 360°$ je tečné zrychlení záporné a rychlost kabiny se zmenšuje.
Normálová složka výslednice, která je vektorovým součtem složky $\boldsymbol{F}_2$ tíhové síly ve směru poloměru a reakce ramene $\boldsymbol{R}$, uděluje kabině dostředivé zrychlení $\boldsymbol{a}_\mathrm{n}$ o velikosti v^2/r. Rychlost kabiny určíme užitím zákona zachování mechanické energie:

$$mgh = mgr(1-\cos\varphi) = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2gr(1-\cos\varphi) .$$

Pak $\quad a_\mathrm{n} = \dfrac{v^2}{r} = 2g(1-\cos\varphi)$.

Zvolme vztažnou soustavu podle obr. R11. Celkové zrychlení kabiny je vektor

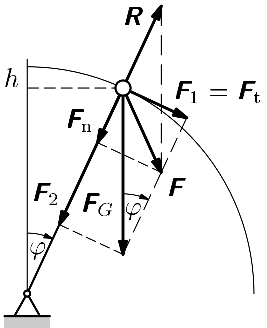
$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_\mathrm{t} + \boldsymbol{a}_\mathrm{n} &= (a_\mathrm{t}\cos\varphi - a_\mathrm{n}\sin\varphi, a_\mathrm{t}\sin\varphi + a_\mathrm{n}\cos\varphi) = \\ &= g(3\sin\varphi\cos\varphi - 2\sin\varphi, 1 + 2\cos\varphi - 3\cos^2\varphi) .\end{aligned}$$

Pro velikost a směr celkového zrychlení platí

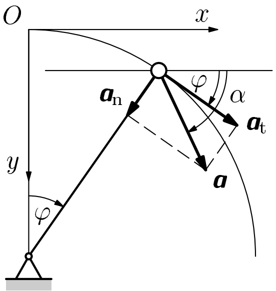
$$a = \sqrt{a_\mathrm{t}^2 + a_\mathrm{n}^2} = g\sqrt{5 - 8\cos\varphi + 3\cos^2\varphi} ,$$

$$\alpha = \varphi + \mathrm{arctg}\frac{a_\mathrm{n}}{a_\mathrm{t}} = \varphi + \mathrm{arctg}\frac{2(1-\cos\varphi)}{\sin\varphi} ,$$

kde α je měřeno od osy x s orientací úhlu φ. **3 body**



Obr. R10



Obr. R11

b) Platí $\boldsymbol{F}_{\rm n} = \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{R} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}_{\rm n} - \boldsymbol{F}_2$. Orientace složky $\boldsymbol{F}_2$ a reakce $\boldsymbol{R}$ vzhledem ke středu trajektorie se během pohybu mění, stále však platí

$$|\boldsymbol{R}| = |ma_{\rm n} - mg\cos\varphi| = mg|2 - 3\cos\varphi|\,.$$

Reakce ramene je nulová a rameno tedy není namáháno v okamžiku, kdy

$$\cos\varphi = \frac{2}{3}\,, \quad \text{tedy pro úhly} \quad \varphi_1 = 48{,}2^\circ\,, \quad \varphi_2 = 311{,}8^\circ\,.$$

Jestliže $2 - 3\cos\varphi < 0$, tj. pro $0 \leq \varphi < \varphi_1$ a pro $\varphi_2 < \varphi \leq 360^\circ$, směřuje reakce ramene od středu a rameno je namáháno tlakem. Jestliže $2 - 3\cos\varphi > 0$, tj. pro $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$, směřuje reakce ramene do středu a rameno je namáháno tahem.

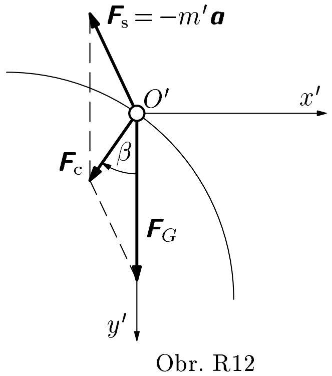
3 body

c) V neinerciální vztažné soustavě spojené s kabinou působí na člověka o hmotnosti m' výslednice $\boldsymbol{F}_{\rm c}$ tíhové síly $\boldsymbol{F}'_G$ a setrvačné síly $\boldsymbol{F}_{\rm s}$ (obr. R12). Platí

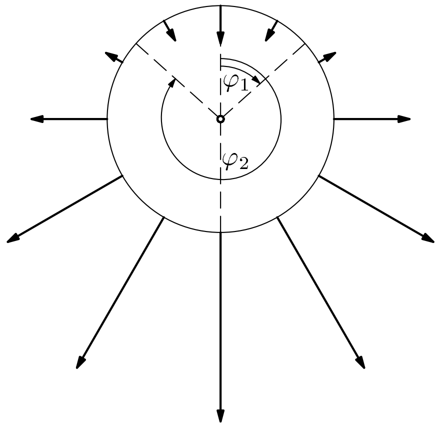
$$\boldsymbol{F}_{\rm c} = \boldsymbol{F}'_G + \boldsymbol{F}_{\rm s} = m'(\boldsymbol{g} - \boldsymbol{a}) = m'\left(\boldsymbol{g} - \frac{\boldsymbol{F}_G + \boldsymbol{R}}{m}\right) = -\frac{m'}{m}\boldsymbol{R}.$$

Výsledná síla $\boldsymbol{F}_{\rm c}$ má tedy v každém okamžiku opačný směr než reakce, kterou působí rameno na kabinu a velikost $F_{\rm c} = m'g|2 - 3\cos\varphi|$. Závislost výsledné síly působící na člověka v kabině na úhlu φ je patrná z obr. R13:

- Pro $\varphi = 0$ je $\boldsymbol{F}_{\rm c} = m'\boldsymbol{g}$.
- Pro $0 \leq \varphi < \varphi_1$ a pro $\varphi_2 < \varphi \leq 360^\circ$ výsledná síla směřuje do středu trajektorie.
- Pro $\varphi = \varphi_1$ a pro $\varphi = \varphi_2$ nastává beztížný stav.
- Pro $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$ výsledná síla směřuje od středu trajektorie. Největší velikost má pro $\varphi = 180^\circ$, kdy $F_{\rm c} = 5m'g$. **4 body**



Obr. R12



Obr. R13

7. a) Vyjdeme ze zákonů zachování relativistické hybnosti a relativistické energie

$$\boldsymbol{p}_{\mathrm{K}} = \boldsymbol{p}_{\pi+} + \boldsymbol{p}_{\pi 0}, \qquad E_{\mathrm{K}} = E_{\pi+} + E_{\pi 0}\,. \tag{1}$$

V soustavě, ve které je rozpadající se mezon K^+ v klidu, platí $p_{\mathrm{K}} = 0$ a energie mezonu K^+ je rovna klidové energii $E_{\mathrm{K}} = m_{\mathrm{K}}c^2$. Oba zákony lze proto přepsat do tvaru

$$-\boldsymbol{p}_{\pi+} = \boldsymbol{p}_{\pi 0}\,, \tag{2}$$

$$m_{\mathrm{K}}c^2 - E_{\pi+} = E_{\pi 0}\,. \tag{3}$$

2 body

Vynásobíme-li rovnici (2) rychlostí světla c a umocníme obě rovnice na druhou, dostáváme

$$c^2 p_{\pi+}^2 = c^2 p_{\pi 0}^2\,, \tag{4}$$

$${m_{\mathrm{K}}}^2 c^4 - 2m_{\mathrm{K}}c^2 E_{\pi+} + E_{\pi+}^2 = E_{\pi 0}^2\,. \tag{5}$$

Odečtení první rovnice (4) od (5) vede ke vztahu

$${m_{\mathrm{K}}}^2 c^4 - 2m_{\mathrm{K}}c^2 E_{\pi+} + \underbrace{E_{\pi+}^2 - c^2 p_{\pi+}^2}_{m_{\pi+}^2 c^4} = \underbrace{E_{\pi 0}^2 - c^2 p_{\pi 0}^2}_{m_{\pi 0}^2 c^4}\,.$$

Vyjádříme-li z poslední rovnice $E_{\pi+}$, vychází

$$E_{\pi+} = c^2\,\frac{{m_{\mathrm{K}}}^2 + {m_{\pi+}}^2 - {m_{\pi 0}}^2}{2m_{\mathrm{K}}}\,. \tag{6}$$

Odečtením klidové energie pak získáme kinetickou energii mezonu

$$T_{\pi+} = E_{\pi+} - m_{\pi+}c^2 = c^2\,\frac{{m_{\mathrm{K}}}^2 + {m_{\pi+}}^2 - {m_{\pi 0}}^2 - 2m_{\mathrm{K}}m_{\pi+}}{2m_{\mathrm{K}}} \doteq 110{,}5\,\mathrm{MeV}\,.$$

Velikost $v_{\pi+}$ rychlosti mezonu najdeme z jeho celkové energie $E_{\pi+}$, neboť platí

$$E_{\pi+} = \frac{m_{\pi+}c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_{\pi+}^2}{c^2}}}\,.$$

Vyjádříme-li $v_{\pi+}$ a dosadíme-li za $E_{\pi+}$ z (6), dostáváme

$$v_{\pi+} = c\sqrt{1 - \left(\frac{m_{\pi+}c^2}{E_{\pi+}}\right)^2} = c\sqrt{1 - \left(\frac{2m_{\mathrm{K}}m_{\pi+}}{{m_{\mathrm{K}}}^2 + {m_{\pi+}}^2 - {m_{\pi 0}}^2}\right)^2} \doteq 0{,}83\,c\,.$$

Číselně $v_{\pi+} \doteq 2{,}49 \cdot 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Vzhledem k symetrii rovnic (1) odvodíme další vztahy záměnou indexů.

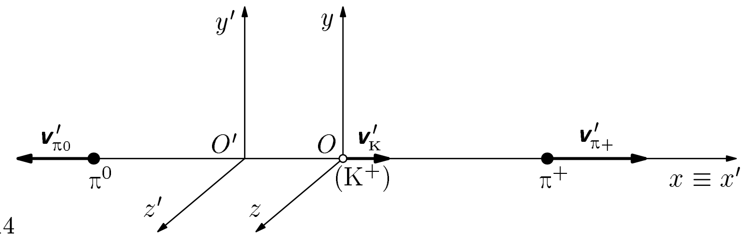
$$T_{\pi0} = c^2\,\frac{{m_\mathrm{K}}^2 + {m_{\pi0}}^2 - {m_{\pi+}}^2 - 2m_\mathrm{K}m_{\pi0}}{2m_\mathrm{K}} \doteq 112{,}6\ \mathrm{MeV}\,,$$

$$v_{\pi0} = c\sqrt{1 - \left(\frac{2m_\mathrm{K}m_{\pi0}}{{m_\mathrm{K}}^2 + {m_{\pi0}}^2 - {m_{\pi+}}^2}\right)^2} \doteq 0{,}84\,c\,.$$

Číselně $v_{\pi0} \doteq 2{,}51 \cdot 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

4 body

b) Po rozpadu mezonu K^+ pokračuje těžiště soustavy π^+ , π^0 v pohybu, který před rozpadem konal mezon K^+. Vztažnou soustavu $Oxyz$, ve které byl mezon v klidu, a vztažnou soustavu $O'x'y'z'$ v laboratoři volíme podle obr. R14, který je nakreslen z hlediska pozorovatele v laboratoři.



Obr. R14

Podle relativistického zákona skládání rychlostí musí platit

$$v'_{\pi+} = \frac{v_{\pi+} + v'_\mathrm{K}}{1 + \dfrac{v_{\pi+}v'_\mathrm{K}}{c^2}}\,.$$

Pro v'_K tak dostáváme

$$v'_\mathrm{K} = \frac{v'_{\pi+} - v_{\pi+}}{1 - \dfrac{v'_{\pi+}v_{\pi+}}{c^2}} \doteq 0{,}0687\,c \doteq 2{,}06 \cdot 10^7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}\,.$$

Pro celkovou energii E'_K mezonu K^+ ve vztažné soustavě spojené s laboratoří pak vychází

$$E'_\mathrm{K} = \frac{m_\mathrm{K}c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{v'^2_\mathrm{K}}{c^2}}} \doteq 498{,}9\ \mathrm{MeV}\,.$$

4 body