Řešení úloh regionálního kola 45. ročníku fyzikální olympiády.

Kategorie D

Autoři úloh: I. Volf (1) a J. Jírů (2,3,4)

1. a) Označme na každém úseku zrychlení a, počáteční rychlost v_1, konečnou rychlost v_2, délku úseku s a celkovou hmotnost m. Cyklista na zvoleném úseku vykoná práci

$$W = Fs = mas = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \,. \tag{1}$$

Z rovnosti plyne

$$a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2s} \,. \tag{2}$$

Zrychlení na prvním úseku je 0,33 $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$, na druhém 0,28 $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$, tedy na prvním je větší.

2 body

b) Označme Δt dobu jízdy na zvoleném úseku. Z rovnice $a = \dfrac{v_2 - v_1}{\Delta t}$ a z rovnice (2) plyne

$$\Delta t = \frac{2s}{v_1 + v_2} \,. \tag{3}$$

Hledaný průměrný výkon získáme použitím vzorce $P_\mathrm{p} = \dfrac{W}{\Delta t}$ a rovnic (1) a (3). Po dosazení a úpravě dostaneme

$$P_\mathrm{p} = \frac{m(v_2^2 - v_1^2)(v_2 + v_1)}{4s} \,.$$

Průměrný výkon na prvním úseku je 150 W, na druhém 210 W, tedy na druhém je větší.

3 body

c) Okamžitý výkon působící síly $F = ma$ při rychlosti v je $P = mav$. Na začátku prvního úseku je okamžitý výkon 100 W, na konci druhého úseku 250 W.

2 body

d) Výkon je větší o výkon potřebný k překonání odporové síly. Pro hledaný okamžitý výkon proto platí $P' = P + F_\mathrm{odp}v$, kde F_odp je odporová síla při rychlosti v. Potřebné odporové síly získáme porovnáním s odporovou silou při rychlosti 24 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Na začátku prvního úseku je rychlost poloviční, je proto odporová síla čtvrtinová, tj. 5 N. Okamžitý výkon je 120 W. Na konci druhého úseku je rychlost 1,5 krát větší, je proto odporová síly 2,25krát větší, tedy 45 N. Okamžitý výkon je 700 W.

3 body

Pozn. V zadání se obecné řešení nepožaduje, úlohu stačí vyřešit libovolným způsobem pouze číselně.

2. a) Při vyjetí na horní vodorovnou rovinu se přírůstek potenciální energie automobilu rovná úbytku energie kinetické. Tento přírůstek potenciální energie je roven minimální kinetické energii, kterou musí automobil mít na dolní vodorovné rovině, aby s vypnutým motorem vyjel na horní vodorovnou rovinu. Tedy

$$\Delta E_\mathrm{p} = E_\mathrm{k1} - E_\mathrm{k2} = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_2^2 \qquad \Delta E_\mathrm{p} = E_{\mathrm{k_{min}}} = \frac{1}{2}mv_{min}^2$$

Z rovnosti pravých stran plyne

$$v_\mathrm{min} = \sqrt{v_1^2 - v_2^2}\,, \tag{1}$$

číselně $v_\mathrm{min} = 40\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$. **2 body**

b) Zrychlení rovnoměrně zpomaleného pohybu při jízdě nahoru je konstantní a má opačný směr než okamžitá rychlost automobilu. Jeho velikost lze vyjádřit

$$a = \frac{v_1 - v_2}{\Delta t} \quad \text{nebo} \quad a = \frac{v_\mathrm{min}}{\Delta t_0}\,.$$

Z rovnosti pravých stran a z rovnice (1) plyne

$$\Delta t_0 = \sqrt{\frac{v_1 + v_2}{v_1 - v_2}} \cdot \Delta t = 24\ \mathrm{s}\,.$$

3 body

c) Sklon je určen poměrem výšky a délky nakloněné roviny $\sin\alpha = h/l$. Pro velikost zrychlení automobilu při jízdě do kopce platí

$$a = g\sin\alpha = \frac{v_1 - v_2}{\Delta t}\,.$$

Z toho

$$\sin\alpha = \frac{h}{l} = \frac{v_1 - v_2}{g\Delta t} = 0{,}047 = 4{,}7\ \%\,.$$

2 body

d) Délka svahu je rovna dráze uražené na svahu

$$l = v_1\Delta t - \frac{1}{2}a(\Delta t)^2\,, \quad \text{kde} \quad a = \frac{v_1 - v_2}{\Delta t}\,.$$

Po dosazení a úpravě dostaneme

$$l = \frac{v_1 + v_2}{2}\Delta t = 133\ \mathrm{m}\,.$$

3 body

3. a) Velikost tečného zrychlení těžiště kosmonauta během celého roztáčení je

$$a_\mathrm{t} = \frac{v}{t_\mathrm{k}}, \quad \text{kde} \quad v = r\omega = 2\pi f r$$

je jeho konečná obvodová rychlost. Po dosazení dostaneme

$$a_\mathrm{t} = \frac{2\pi f r}{t_\mathrm{k}} = 0{,}24\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}\,.$$

Velikost dostředivého zrychlení je maximální při maximální rychlosti:

$$a_\mathrm{d} = r\omega^2 = 4\pi^2 f^2 r = 28\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}\,.$$

4 body

b) Těžiště kosmonauta během rovnoměrně zrychleného pohybu po kružnici urazilo dráhu

$$s = N\cdot 2\pi r = \frac{1}{2}a_\mathrm{t}t_\mathrm{k}^2\,, \quad \text{kde opět} \quad a_\mathrm{t} = \frac{2\pi f r}{t_\mathrm{k}}\,.$$

Z rovnic plyne $N = \frac{f t_\mathrm{k}}{2} = 9{,}6$.

2 body

c) Dráha těžiště kosmonauta během první otáčky je

$$2\pi r = \frac{1}{2}a_\mathrm{t}t_1^2\,, \quad \text{kde opět} \quad a_\mathrm{t} = \frac{2\pi f r}{t_\mathrm{k}}\,.$$

Z rovnic plyne $t_1 = \sqrt{\frac{2t_\mathrm{k}}{f}} = 15\ \mathrm{s}$.

2 body

d) V rotující soustavě působí na kosmonauta celková síla, která je výslednicí dvou navzájem kolmých sil: svisle dolů působící tíhové síly $\boldsymbol{F}_G$ a ve vodorovném směru působící setrvačné odstředivé síly $\boldsymbol{F}_\mathrm{s}$. Hledané přetížení je

$$k = \frac{\sqrt{F_G^2 + F_\mathrm{s}^2}}{F_G} = \frac{\sqrt{(mg)^2 + (mr\cdot(2\pi f)^2)^2}}{mg} = \frac{\sqrt{g^2 + 16\pi^4 f^4 r^2}}{g} = 3{,}1\,.$$

2 body

4. a) Svislá složka pohybu kladiva představuje rovnoměrně zpomalený pohyb se zrychlením $\boldsymbol{g}$ do zastavení a poté po stejnou dobu volný pád. Maximální výška hodu je

$$h = \frac{1}{2} g \left(\frac{t_1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8} g t_1^2 = 18{,}7 \text{ m}\,.$$

2 body

b) Minimální velikost rychlosti má kladivo v maximální výšce. V této poloze je svislá složka rychlosti nulová, minimální velikost rychlosti je určena vodorovnou složkou

$$v_{\min} = v_x = \frac{d}{t_1} = 18{,}5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}\,.$$

2 body

Maximální velikost rychlosti má kladivo v okamžiku vypuštění nebo v okamžiku dopadu. Tehdy je velikost svislé složky rychlosti $v_y = g\frac{t_1}{2}$ a vodorovné $v_x = \frac{d}{t_1}$. Kladivo má maximální velikost rychlosti

$$v_{\max} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\frac{d^2}{t_1^2} + \frac{1}{4} g^2 t_1^2} = 26{,}6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}\,.$$

3 body

c) Elevační úhel určíme ze složek rychlosti v nulovém čase hodu:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{g\frac{t_1}{2}}{\frac{d}{t_1}} = \frac{g t_1^2}{2d} = 1{,}036\,, \qquad \alpha = 46{,}0^\circ\,.$$

3 body