Řešení úloh 1. kola 45. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie D*

Autoři úloh: J. Jírů (1, 3, 4, 5, 7), I. Volf (2), V. Vícha (6)

1. Označme s dráhu uraženou jedním směrem, pro prvního cyklistu t_1 dobu jízdy nahoru, t_2 dobu jízdy dolů a t celkovou dobu jízdy, pro druhého cyklistu analogicky t'_1 dobu jízdy nahoru, t'_2 dobu jízdy dolů a t' celkovou dobu jízdy.

a) Platí

$$v_\mathrm{p} = \frac{2s}{t_1 + t_2} = \frac{2s}{\dfrac{s}{v_1} + \dfrac{s}{v_2}} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2} = 23{,}70\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}\,.$$

3 body

b) Platí

$$v'_2 = \frac{s}{t' - t'_1} = \frac{s}{\dfrac{2s}{v'_\mathrm{p}} - \dfrac{s}{v'_1}} = \frac{v'_1v'_\mathrm{p}}{2v'_1 - v'_\mathrm{p}} = 47{,}02\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}\,.$$

Jiná možnost řešení: Použít výsledek úlohy a), z něj vyjádřit v_2 a všechny rychlosti „opatřit čárkou“.

3 body

c) Pro prvního cyklistu platí

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\dfrac{s}{v_1}}{\dfrac{s}{v_2}} = \frac{v_2}{v_1} = 2{,}72\,,$$

pro druhého cyklistu analogicky $\dfrac{t'_1}{t'_2} = \dfrac{v'_2}{v'_1}$. Dosazením výsledku úlohy b) dostaneme

$$\frac{t'_1}{t'_2} = \frac{v'_\mathrm{p}}{2v'_1 - v'_\mathrm{p}} = 2{,}95\,.$$

4 body

2. a) Z rovnic $v_{\mathrm{m}1} = a_1t_1$, $s_1 = \dfrac{1}{2}a_1t_1^2$ pro první běh plyne

$$v_{\mathrm{m}1} = \frac{2s_1}{t_1} = 8{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

Čas dosažený na celé dráze při prvním běhu je

$$t_{\mathrm{k}1} = t_1 + \frac{s - s_1}{v_{\mathrm{m}1}} = \frac{s + s_1}{2s_1}t_1 = 17{,}0\ \mathrm{s}\,.$$

Analogicky pro druhý běh

$$v_{m2} = \frac{2s_2}{t_2} = 8{,}6\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,, \qquad t_{k2} = \frac{s + s_2}{2s_2} t_2 = 15{,}2\ \mathrm{s}\,.$$

4 body

b) Při třetím běhu platí

$$s - s_3 = v_{m3}(t_{k3} - t_3) = v_{m3}\left(t_{k3} - \frac{2s_3}{v_{m3}}\right) = v_{m3} t_{k3} - 2s_3\,,$$

$$v_{m3} = \frac{s + s_3}{t_{k3}} = 10{,}8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

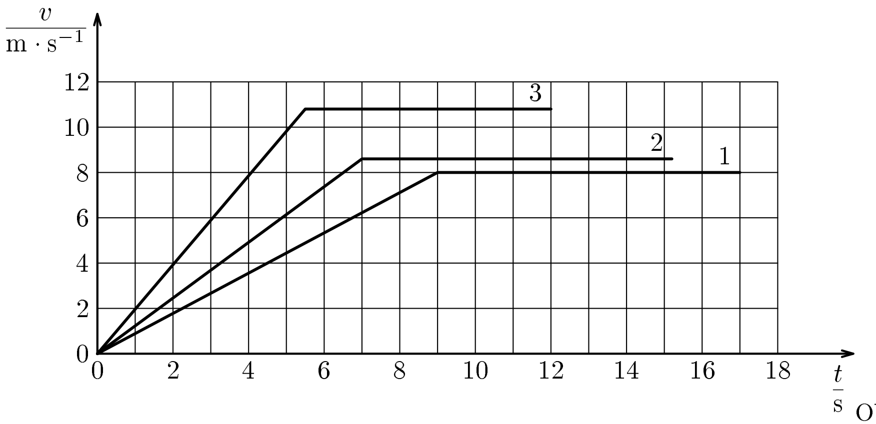
2body

c) K sestrojení grafů (obr. R1) je nutné dopočítat čas

$$t_3 = \frac{2s_3}{s + s_3} t_{k3} = 5{,}5\ \mathrm{s}\,.$$

Zbývající veličiny t_1, t_2, t_{k1}, t_{k2}, t_{k3}, v_{m1}, v_{m2} a v_{m3} už známe.

3 body



Obr. R1

d) Zrychlení při rozbíhání při jednotlivých pohybech jsou

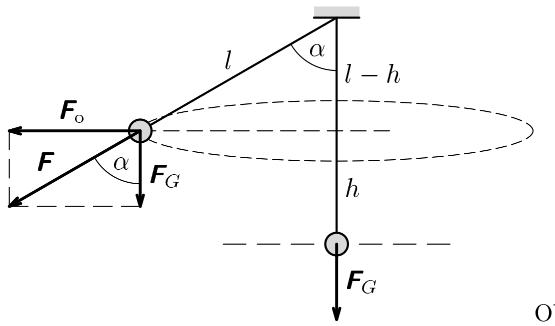
$$a_1 = \frac{v_{m1}}{t_1} = 0{,}89\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \quad a_2 = \frac{v_{m2}}{t_2} = 1{,}2\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \quad a_3 = \frac{v_{m3}}{t_3} = 2{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,.$$

1 bod

3. a) Vyjdeme z obr. R2. Podle pozorovatele ve vztažné soustavě otáčející se s obíhající koulí je síla $\boldsymbol{F}$, která napíná lanko, výslednicí tíhové síly $\boldsymbol{F}_G$ a setrvačné odstředivé síly $\boldsymbol{F}_\mathrm{o}$. Platí

$$F = \frac{F_G}{\cos\alpha} = \frac{mg}{\cos\alpha} = 2mg = 51\ \mathrm{N}\,.$$

2 body



Obr. R2

b) Odstředivá síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{o}$ má velikost

$$F_\mathrm{o} = \frac{mv^2}{r} = \frac{mv^2}{l\sin\alpha} = F_G\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{mg\sin\alpha}{\cos\alpha}\,.$$

Z toho

$$v^2 = \frac{lg\sin^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{3gl}{2}\,, \qquad v = \sqrt{\frac{lg\sin^2\alpha}{\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{3gl}{2}} = 6{,}16\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

3 body

c) Současně platí

$$F_\mathrm{o} = m\frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{4m\pi^2 l\sin\alpha}{T^2} = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha = mg\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\,.$$

Z toho

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g}} = \pi\sqrt{\frac{2l}{g}} = 2{,}28\ \mathrm{s}\,.$$

2 body

d) Pohybující se koule má vůči původní poloze celkovou mechanickou energii

$$E = E_\mathrm{p} + E_\mathrm{k} = mgh + \frac{1}{2}mv^2 = mgl(1-\cos\alpha) + \frac{1}{2}mlg\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} =$$

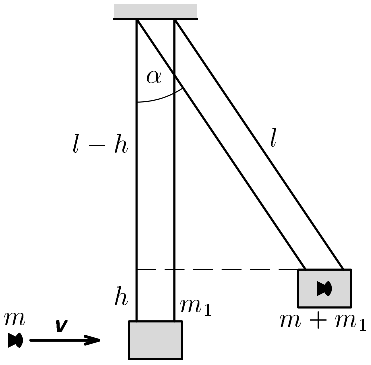
$$= mgl\left(1 - \cos\alpha + \frac{\sin^2\alpha}{2\cos\alpha}\right) = \frac{5}{4}mgl = 82\ \mathrm{J}\,.$$

3 body

4. a) Ze zákona zachování hybnosti plyne pro izolovanou soustavu krabička a diabola

$$mv = (m + m_1)v_1 \qquad v_1 = \frac{m}{m + m_1}v\,, \quad (1)$$

kde v_1 je velikost okamžité rychlosti soustavy bezprostředně po zásahu. Porovnáním kinetické energie bezprostředně po zásahu a potenciální energie v krajní poloze ve výšce $h = l(1 - \cos\alpha)$, kde se soustava zastaví, dostaneme:



Obr. R3

$$(m + m_1)gl(1 - \cos\alpha) = \frac{1}{2}(m + m_1)v_1^2 = \frac{m^2}{2(m + m_1)}v^2\,,$$

$$v = \frac{m + m_1}{m}\sqrt{2gl(1 - \cos\alpha)} = 190\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}\,.$$

4 body

b) Kinetická energie střely je

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{(m + m_1)^2 gl(1 - \cos\alpha)}{m} = 9{,}4\ \mathrm{J}\,,$$

což je potenciální energie tělesa o hmotnosti 1 kg ve výšce 94 cm.

2 body

c) Hledaný poměr je $k = \dfrac{\frac{1}{2}(m + m_1)v_1^2}{\frac{1}{2}mv^2}$. Užitím vztahu (1) dostaneme

$$k = \frac{m}{m + m_1} = 0{,}85\ \%\,.$$

Naprostá většina kinetické energie střely se tedy při zásahu přemění na vnitřní energii soustavy.

2 body

d) Z kinematických rovnic $v = at, \quad d = \frac{1}{2}at^2$ plyne

$$t = \frac{2d}{v} = 0{,}0056\ \mathrm{s}\,, \qquad a = \frac{v^2}{2d} = 34\,000\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}\,.$$

2 body

5. a) Práce vykonaná motorem během rozjíždění je rovna kinetické energii automobilu na konci rozjíždění, kdy se automobil pohyboval rychlostí $v_\mathrm{k} = at_\mathrm{r}$. Průměrný výkon byl

$$P_\mathrm{p} = \frac{W}{t_\mathrm{r}} = \frac{\frac{1}{2}mv_\mathrm{k}^2}{t_\mathrm{r}} = \frac{1}{2}ma^2t_\mathrm{r} = 16\ \mathrm{kW}\,.$$

2 body

b) Okamžitý výkon síly $F = ma$ při rychlosti $v = at$ je $P = Fv = ma^2t$.

$$P_1 = ma^2t_1 = 20\ \mathrm{kW}\,, \qquad P_\mathrm{k} = ma^2t_\mathrm{r} = 32\ \mathrm{kW}\,.$$

2 body

c) Podle výsledku úlohy b) je okamžitý výkon $P = ma^2t$ během rozjíždění přímo úměrný času. Grafem je úsečka s jedním koncovým bodem v počátku (obr. R4).

1 bod

d) Při stálém výkonu P_k platí

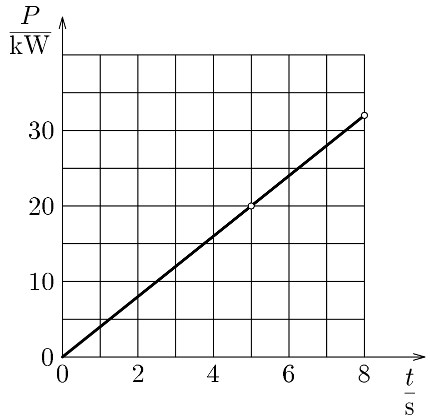
$$P_\mathrm{k}t = \frac{1}{2}mv'^2\,, \qquad v' = \sqrt{\frac{2P_\mathrm{k}t}{m}}\,, \qquad v_\mathrm{k} = \sqrt{\frac{2P_\mathrm{k}t_\mathrm{r}}{m}} = 22{,}6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

2 body

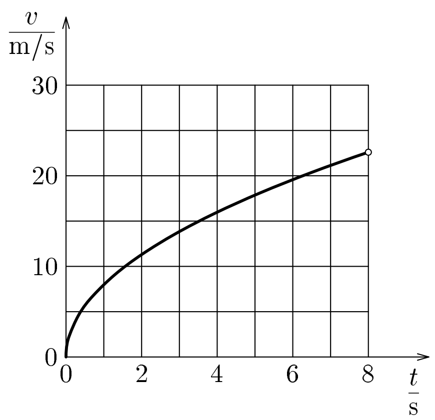
e) Podle výsledku úlohy d) je okamžitá rychlost přímo úměrná 2. odmocnině času. Grafem je úsek paraboly (obr. R5), k jejímu sestrojení sestavíme tabulku:

t/s	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$v/\mathrm{m\cdot s^{-1}}$	0	8,0	11,3	13,9	16,0	17,9	19,6	21,2	22,6

3 body



Obr. R4



Obr. R5

7. a) Pro dobu letu a výšku vrhu platí:

$$t_1 = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}\,, \qquad h = v_0 \sin\alpha \cdot \frac{t_1}{2} - \frac{1}{2}g\left(\frac{t_1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}g\left(\frac{t_1}{2}\right)^2.$$

Z toho

$$t_1 = \sqrt{\frac{8h}{g}} = 3{,}38\ \mathrm{s}\,. \tag{1}$$

2 body

b) Ze zákona zachování mechanické energie plyne, že těleso má minimální rychlost v nejvyšším bodě trajektorie a maximální rychlost v místě vrhu a v místě dopadu. V nejvyšším bodě trajektorie je y-ová složka rychlosti nulová, x-ová je proto rovna hledané minimální rychlosti. S použitím vztahu (1) dostaneme

$$v_{\min} = v_x = \frac{d}{t_1} = d\sqrt{\frac{g}{8h}} = 11{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,. \tag{2}$$

Porovnáním mechanické energie v nejvyšším a nejnižším bodě získáme rovnici

$$\frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \frac{1}{2}mv_{\min}^2 + mgh\,,$$

z níž s užitím vztahu (2) odvodíme

$$v_{\max} = \sqrt{v_{\min}^2 + 2gh} = \sqrt{\frac{g(d^2 + 16h^2)}{8h}} = 19{,}9\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,. \tag{3}$$

3 body

c) V místě vrhu platí $v_y = v_0 \sin\alpha = \dfrac{gt_1}{2}$, $v_x = v_0 \cos\alpha = \dfrac{d}{t_1}$. Z toho s užitím vztahu (1) dostaneme

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{gt_1^2}{2d} = \frac{4h}{d}\,, \qquad \alpha = 56{,}5^\circ\,.$$

2 body

d) Délka vrhu je $d = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$. Maximální délky vrhu bychom dosáhli při elevačním úhlu 45°. S užitím vztahu (3) dostaneme

$$d_{\max} = \frac{v_{\max}^2}{g} = \frac{d^2 + 16h^2}{8h} = 40{,}2\ \mathrm{m}\,.$$

3 body