Řešení úloh regionálního kola 45. ročníku fyzikální olympiády.
Kategorie A

1. a) Látkové množství vodíku vyloučené za jednu hodinu v jednom rozkladném článku je

$$n = \frac{V_0}{kV_{\mathrm{m0}}} = \frac{250\ \mathrm{m}^3}{100 \cdot 2{,}2414 \cdot 10^{-2}\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{mol}^{-1}} = 111{,}5\ \mathrm{mol}\,.$$

Protože na vyloučení jedné molekuly vodíku jsou zapotřebí dva elementární náboje, projde každým článkem za hodinu náboj

$$Q = N \cdot 2e = nN_{\mathrm{A}} \cdot 2e = 2nF = 2{,}15 \cdot 10^7\ \mathrm{C}\,,$$

kde N je počet molekul vodíku vyloučených za jednu hodinu v jednom článku, N_{A} je Avogadrova konstanta a F je Faradayova konstanta. Obvodem tedy prochází proud $I = \dfrac{Q}{t} = 6{,}0 \cdot 10^3$ A.

6 bodů

b) Celková hmotnost vodíku vyloučeného elektrolýzou za jednu hodinu je

$$m = nM_{\mathrm{m}} = \frac{V_0}{V_{\mathrm{m0}}} M_{\mathrm{m}} = 22{,}5\ \mathrm{kg}\,.$$

Jeho spálením se získá teplo $Q_{\mathrm{s}} = 22{,}5\ \mathrm{kg} \cdot 143\ \mathrm{MJ} \cdot \mathrm{kg}^{-1} = 3{,}19 \cdot 10^9$ J. Elektrická práce za stejnou dobu je $\mathrm{W}_{\mathrm{el}} = kUQ = 4{,}74 \cdot 10^9$ J. Energetická účinnost výroby je

$$\eta = \frac{Q_{\mathrm{s}}}{W_{\mathrm{el}}} = 67\ \%\,.$$

4 body

2.a) Vyjdeme z vlastností trojúhelníků na obr. R1 a ze zákona lomu. Platí

$$|AC| = 2h\,\mathrm{tg}\,\beta = 2h\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = 2h\frac{\dfrac{\sin\alpha}{n}}{\sqrt{1-\dfrac{\sin^2\alpha}{n^2}}} = 2h\frac{\sin\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}\,,$$

$$d = |CD| = |AC|\cos\alpha = 2h\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}} = \frac{h\sin 2\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}\,.$$

4 body

b) Dostali jsme funkci úhlu α, která je v intervalu $\langle 0, \pi/2\rangle$ spojitá, v bodech 0 a $\pi/2$ má hodnotu 0 a uvnitř intervalu je všude kladná. Musí tedy v některém vnitřním bodě intervalu dosáhnout maxima. Určíme první derivaci d podle α a položíme ji rovnu 0:

$$\frac{\mathrm{d}d}{\mathrm{d}\alpha} = h\frac{2\cos 2\alpha\sqrt{n^2-\sin^2\alpha} - \sin 2\alpha\dfrac{\frac{1}{2}(-2\sin\alpha\cos\alpha)}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}}{n^2-\sin^2\alpha} =$$

$$= h\frac{4\cos 2\alpha(n^2-\sin^2\alpha)+\sin^2 2\alpha}{2(n^2-\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}} = 0\,.$$

Po úpravě dostaneme pro čitatele podmínku

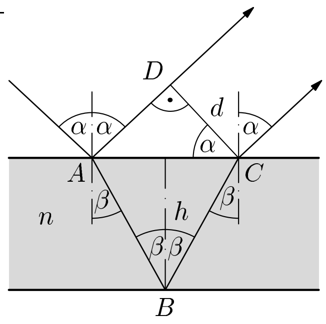
$$4(1-2\sin^2\alpha)(n^2-\sin^2\alpha)+4\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha) = 0$$

a po další úpravě dojdeme k bikvadratické rovnici

$$\sin^4\alpha - 2n^2\sin^2\alpha + n^2 = 0\,.$$

Protože $n > 1$, vyhovuje pouze kořen

$$\sin\alpha = \sin\alpha_{\mathrm{m}} = \sqrt{n^2 - n\sqrt{n^2-1}}\,.$$



Obr. R1

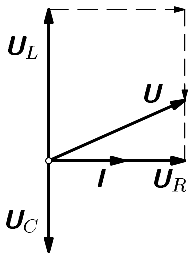
4 body

Pro dané hodnoty vychází

$\sin\alpha_{\mathrm{m}} = 0{,}75526$, $\alpha_{\mathrm{m}} = 49{,}0°$, $d_{\mathrm{m}} = 37{,}5$ mm. **2 body**

3.a) Z fázorového diagramu sériového obvodu LRC (obr. R2) odvodíme pro impedanci obvodu vztah

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{\sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}}{I} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}\,.$$



Obr. R2

Platí tedy

$$Z_1^2 = R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C_1}\right)^2, \quad Z_2^2 = R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C_2}\right)^2.$$

Z rovnosti $Z_1^2 = Z_2^2$ dostaneme

$$\frac{2L}{C_2} - \frac{2L}{C_1} + \frac{1}{\omega^2 C_1^2} - \frac{1}{\omega^2 C_2^2} = 0\,, \qquad L = \frac{C_1 + C_2}{2\omega^2 C_1 C_2}\,,$$

$$R^2 = Z_1^2 - \left(\omega L - \frac{1}{\omega C_1}\right)^2 = Z_1^2 - \left(\frac{C_1 + C_2}{2\omega C_1 C_2} - \frac{1}{\omega C_1}\right)^2 = Z_1^2 - \left(\frac{C_1 - C_2}{2\omega C_1 C_2}\right)^2,$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{U}{I}\right)^2 - \left(\frac{C_1 - C_2}{2\omega C_1 C_2}\right)^2}\,.$$

Pro dané hodnoty $L = 2{,}15 \cdot 10^{-4}$ H, $R = 352\ \Omega$.

5 bodů

b) Obvodem bude procházet maximální proud, bude-li impedance minimální, tedy když $X_C = X_L$ – sériová rezonance. Pak

$$C = C_\mathrm{r} = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{2C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 2{,}40 \cdot 10^2\ \mathrm{pF}\,.$$

Při sériové rezonanci platí $Z = R$ a obvodem prochází proud

$$I_\mathrm{r} = \frac{U}{R} = 5{,}68\ \mathrm{mA}\,.$$

3 body

c) Při sériové rezonanci bude na kondenzátoru napětí

$$U_{C\mathrm{r}} = X_{C\mathrm{r}} I_\mathrm{r} = \frac{I_\mathrm{r}}{\omega C_\mathrm{r}} = 5{,}38\ \mathrm{V}\,.$$

2 body

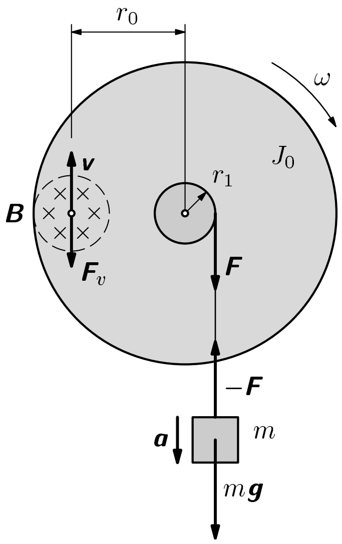
4.a) $[k] = \left[\dfrac{F}{Bv}\right] = \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{T\cdot m\cdot s^{-1}}} = \dfrac{\mathrm{N}}{\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{A\cdot m}}\cdot\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = \mathrm{A\cdot s}\,.$ **1 bod**

b) Vyšetřujeme pohyb soustavy dvou těles spojených vláknem. Roztočení kotouče je způsobeno momentem síly vlákna $\boldsymbol{F}$, proti kterému působí moment brzdící síly $\boldsymbol{F}_v$. Na závaží působí tíhová síla $m\boldsymbol{g}$ a proti ní síla vlákna $-\boldsymbol{F}$. Výslednice obou sil uděluje závaží zrychlení $\boldsymbol{a}$. Platí

$$J_0\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = Fr_1 - F_v r_0\,,$$

$$ma = mr_1\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = mg - F\,.$$

Vynásobením druhé rovnice r_1 a sečtením obou rovnic dostaneme pohybovou rovnici soustavy



Obr. R3

$$(J_0 + mr_1^2)\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = mgr_1 - F_v r_0 = mgr_1 - kB\omega r_0^2\,.$$

(Setrvačnost závaží se projevuje stejně jako setrvačnost hmotného bodu o hmotnosti m připevněného ke kotouči ve vzdálenosti r_1 od osy.)

3 body

Jestliže $B = B_0 = 0$, působí na soustavu jen konstantní moment tíhové síly $m\boldsymbol{g}$, otáčivý pohyb kotouče je rovnoměrně zrychlený a jeho úhlová rychlost neomezeně roste.
Jestliže $B \neq 0$, zvětšuje se s rostoucí úhlovou rychlostí kotouče brzdící moment síly $\boldsymbol{F}_v$, až po dosažení mezní úhlové rychlosti ω_m se vyrovná s momentem tíhové síly a otáčivý pohyb kotouče je rovnoměrný. Z rovnosti momentů dostaneme

$$mgr_1 = kB\omega_\mathrm{m} r_0^2\,, \qquad \omega_\mathrm{m} = \frac{mgr_1}{kBr_0^2}\,.$$

Po dosazení číselných hodnot pro $B = B_1$ je $\omega_{\mathrm{m}1} = 81{,}8\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$.

2 body

c) Jestliže $B = B_0 = 0$, platí

$$(J_0 + mr_1^2)\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = mgr_1\,, \qquad \mathrm{d}\omega = \frac{mgr_1}{J_0 + mr_1^2}\mathrm{d}t\,, \qquad \omega = \frac{mgr_1}{J_0 + mr_1^2}t\,.$$

V čase $t = 5\ \mathrm{s}$ je $\omega = \omega_0 = 120\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$. **1 bod**

Pro $B \neq 0$ upravíme pohybovou rovnici na tvar

$$\frac{J_0 + mr_1^2}{mgr_1} \cdot \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = 1 - \frac{kB\omega r_0^2}{mgr_1} = 1 - \frac{\omega}{\omega_\mathrm{m}}\,,$$

separujeme proměnné

$$\frac{\omega_\mathrm{m}\mathrm{d}\omega}{\omega_\mathrm{m} - \omega} = \frac{mgr_1}{J_0 + mr_1^2}\mathrm{d}t$$

a integrujeme

$$\omega_\mathrm{m}\int_0^\omega \frac{\mathrm{d}\omega}{\omega_\mathrm{m} - \omega} = -\omega_\mathrm{m}\ln\frac{\omega_\mathrm{m} - \omega}{\omega_\mathrm{m}} = \frac{mgr_1}{J_0 + mr_1^2}t\,.$$

Z toho vyjádříme hledanou funkci:

$$\omega = \omega_\mathrm{m}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{mgr_1}{\omega_\mathrm{m}(J_0 + mr_1^2)}t}\right) = \frac{mgr_1}{kBr_0^2}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{kBr_0^2}{(J_0 + mr_1^2)}t}\right)\,.$$

V čase $t = 5\ \mathrm{s}$:

pro $B = B_1$ je $\omega = \omega_1 = 62{,}8\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$.

3 body