Řešení úloh regionálního kola 44. ročníku fyzikální olympiády.

Kategorie D

Autor úloh: J. Jírů

1. a) Dráha Δs uražená od času $t_1 = 1{,}00$ s do času $t_2 = 2{,}00$ s je $\Delta s = \frac{1}{2}a(t_2^2 - t_1^2)$.

Z toho určíme zrychlení $a = \dfrac{2\Delta s}{t_2^2 - t_1^2} = 2{,}00\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, konstantní pro celý pohyb. Hledaná dráha od času $t_2 = 2{,}00$ s do času $t_3 = 3{,}00$ s je pak

$$\Delta s' = \frac{1}{2}a(t_3^2 - t_2^2) = 5{,}00\ \mathrm{m}.$$ **2 body**

b) Okamžitá rychlost v čase $t_3 = 3{,}00$ s je $v_3 = at_3 = 6{,}00\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. **1 bod**

c) Dráha uražená za první 3 sekundy pohybu, tedy v čase $t_3 = 3$ s je

$$s = \frac{1}{2}at_3^2 = 9{,}00\ \mathrm{m}.$$

Hledaná průměrná rychlost je pak $v_\mathrm{p} = \dfrac{s}{t_3} = 3{,}00\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. **1 bod**

d) Doba nutná k uražení dráhy $s = 2$ m je $t = \sqrt{\dfrac{2s}{a}} = \sqrt{2}\ \mathrm{s} \doteq 1{,}41$ s. Průměrná rychlost je pak $v_\mathrm{p} = \dfrac{s}{t} = \sqrt{2}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} \doteq 1{,}41\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. **2 body**

e) Ze základních rovnic rovnoměrně zrychleného pohybu s nulovou počáteční rychlostí plyne pro rychlost vztah $v = \sqrt{2as}$. Pro $s = 3$ m vychází

$$v = 2\sqrt{3}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} \doteq 3{,}46\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$ **1 bod**

f) Označme t_1, t_2 dolní a horní mez hledaného časového intervalu. Řešením soustavy rovnic

$$\Delta s = \frac{1}{2}a(t_2^2 - t_1^2) = \frac{1}{2}a(t_2 + t_1)(t_2 - t_1) = 2\ \mathrm{m}, \qquad t_2 - t_1 = 1\ \mathrm{s},$$

dostaneme

$$t_2 + t_1 = 2t_1 + 1{,}00\ \mathrm{s} = \frac{2\Delta s}{a(t_2 - t_1)} = 2{,}00\ \mathrm{s}, \qquad t_1 = 0{,}50\ \mathrm{s},\ t_2 = 1{,}50\ \mathrm{s}.$$ **2 body**

g) Ze základních rovnic rovnoměrně zrychleného pohybu s nulovou počáteční rychlostí plyne pro dráhu vztah $s = \dfrac{v^2}{2a}$. Dosazením $v = 3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ dostaneme hledanou dráhu $s = 2{,}25$ m. **1 bod**

Poznámka: Řadu odpovědí lze získat z grafu závislosti rychlosti na čase, který sestrojíme na základě vypočteného zrychlení v úloze a).

2. a) Průměrná rychlost těžiště během zastavování je $v_0/2$. Těžiště během zastavování urazí dráhu $s = \dfrac{v_0 \Delta t}{2}$. Počet otáček je $N = \dfrac{s}{2\pi r} = \dfrac{v_0 \Delta t}{4\pi r} = 5{,}6$. **2 body**

b) Velikost tečného zrychlení $a_\mathrm{t} = \dfrac{v_0}{\Delta t} = 0{,}072\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ je během zastavování konstantní. Dostředivé zrychlení má na počátku velikost $a_\mathrm{d0} = \dfrac{v_0^2}{r} = 5{,}1\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

2 body

c) Během zastavování se velikost rychlosti těžiště zmenšuje. Platí

$$v = v_0 - a_\mathrm{t} t = v_0 \left(1 - \frac{t}{\Delta t}\right).$$

Proto se zmenšuje i velikost dostředivého zrychlení. V čase $t = t_1$ platí

$$a_\mathrm{d} = \frac{v^2}{r} = \frac{v_0^2 \left(1 - \dfrac{t_1}{\Delta t}\right)^2}{r} = a_\mathrm{t} = \frac{v_0}{\Delta t}\,.$$

Úpravou dostaneme

$$\left(1 - \frac{t_1}{\Delta t}\right)^2 = \frac{r}{v_0 \Delta t}\,, \qquad t_1 = \Delta t \left(1 - \sqrt{\frac{r}{v_0 \Delta t}}\right) \doteq 38\ \mathrm{s}\,.$$ **3 body**

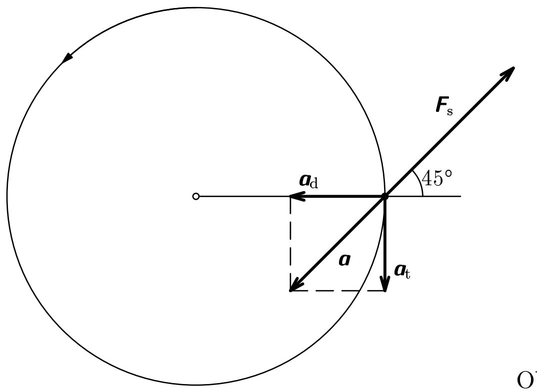
d) Ve vztažné soustavě spojené s kolotočem působí na děvčátko setrvačná síla

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{s} = -m\boldsymbol{a}\,,$$

kde $\boldsymbol{a}$ je výslednice tečného a dostředivého zrychlení těžiště. V čase $t = t_1$ je velikost celkového zrychlení $a = a_\mathrm{t}\sqrt{2}$ a setrvačná síla má velikost

$$F_\mathrm{s} = ma = \frac{m v_0 \sqrt{2}}{\Delta t} = 1{,}4\ \mathrm{N}.$$ **2 body**

e)



Obr. R1

1 bod

3. a) Z rovnice $h = \frac{1}{2}gt_1^2$ plyne pro dobu letu

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}\,. \qquad (1)$$

Počáteční rychlost vrhu má velikost

$$v_0 = \frac{d}{t_1}\,. \qquad (2)$$

Velikost svislé složky rychlosti dopadu je $|v_{y1}| = gt_1$. Pro úhel dopadu platí

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|v_{y1}|}{v_0} = \frac{gt_1^2}{d} = \frac{2h}{d}\,, \qquad \alpha = 47,9^\circ.$$ **3 body**

b) Ze zákona zachování energie plyne

$$mgh + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2\,, \qquad v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2gh}\,.$$

S použitím rovnic (1) a (2) dostaneme

$$v_1 = \sqrt{g\frac{d^2 + 4h^2}{2h}} = 30{,}4\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$ **3 body**

c) Délka šikmého vrhu $d' = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ je největší pro $\alpha = 45^\circ$. V tomto případě užitím rovnic (1) a (2) dostaneme

$$d' = \frac{v_0^2}{g} = \frac{d^2}{t_1^2 g} = \frac{d^2}{2h} = 42{,}5\ \mathrm{m}$$ **4 body**

4. a) Z rovnosti dostředivé a gravitační síly při pohybu kosmické lodi o hmotnosti m po kružnici plyne

$$m\frac{4\pi^2}{T^2}(R+h) = \varkappa\frac{mM}{(R+h)^2}\,,$$

$$R+h = \sqrt[3]{\frac{\varkappa MT^2}{4\pi^2}}\,, \qquad (1)$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{\varkappa MT^2}{4\pi^2}} - R = 115\ \mathrm{km}\,.$$ **3 body**

b) Z rovnosti dostředivé a gravitační síly

$$\frac{mv^2}{R+h} = \varkappa\frac{mM}{(R+h)^2}$$

a z rovnice (1) plyne

$$v = \sqrt{\frac{\varkappa M}{R+h}} = \frac{\sqrt{\varkappa M}}{\sqrt[6]{\frac{\varkappa MT^2}{4\pi^2}}} = \sqrt[3]{\frac{2\pi\varkappa M}{T}} = 1\,630\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$ **3 body**

c) Krátkodobým zapnutím raketového motoru otočeného tryskou proti směru pohybu mírně snížili rychlost měsíčního modulu, který po málo výstředné elipse začal klesat k povrchu Měsíce. **1 bod**

d) Nejkratší dobu oběhu bude mít kosmická loď, která se bude pohybovat po kružnici těsně při měsíčním povrchu. Z rovnosti dostředivé a gravitační síly plyne

$$m\frac{4\pi^2}{T'^2}R = \varkappa\frac{mM}{R^2}\,, \qquad T' = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{\varkappa M}} = 6\,488\ \mathrm{s} = 1\ \mathrm{h}\ 48\ \mathrm{min}.$$

K témuž výsledku se dostaneme užitím 3. Keplerova zákona

$$\frac{T'^2}{T^2} = \frac{R^3}{(R+h)^3}$$

a rovnice (1). **3 body**

Poznámky: 1) Skutečná parkovací trajektorie nebyla kruhová, nýbrž eliptická s minimální a maximální výškou nad měsíčním povrchem 99,4 km a 121,3 km.

2) Po krátkodobém přibrzdění se astronauti dostali po elipse do výšky 14,6 km nad povrchem Měsíce, z níž zahájili sestup a po 12 min 37 s úspěšně přistáli.