Řešení úloh regionálního kola 43. ročníku fyzikální olympiády.

Kategorie C

Autoři úloh: J. Houštěk (1), R. Horáková (2, 3, 4)

1. a) Označme t dobu od začátku pohybu do okamžiku, kdy přední konec vlaku míjí sloup 2. Podle zadání pak platí

$$s - l = \frac{1}{2}a(t - t_1)^2\,, \quad s = \frac{1}{2}at^2\,, \quad s + l = \frac{1}{2}a(t + t_2)^2\,.$$

Odečtením druhé rovnice od první a třetí dostaneme

$$l = \frac{1}{2}at_1(2t - t_1) = \frac{1}{2}at_2(2t + t_2)\,.$$

Z toho

$$t_1(2t - t_1) = t_2(2t + t_2) \quad \Rightarrow \quad t = \frac{t_1^2 + t_2^2}{2(t_1 - t_2)}\,,$$

$$l = \frac{1}{2}at_1\left(\frac{t_1^2 + t_2^2}{t_1 - t_2} - t_1\right) = \frac{at_1t_2(t_1 + t_2)}{2(t_1 - t_2)}\,,$$

$$a = \frac{2l(t_1 - t_2)}{t_1t_2(t_1 + t_2)} = 7{,}14 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}\,.$$

4 body

b) Pro v a s platí

$$v = at = \frac{l(t_1^2 + t_2^2)}{t_1t_2(t_1 + t_2)} = 8{,}40\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 30{,}2\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}\,,$$

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{l(t_1^2 + t_2^2)^2}{4t_1t_2(t_1^2 - t_2^2)} = 493\ \mathrm{m}\,.$$

3 body

c) Ze vzorce $s = \frac{1}{2}at^2$ plyne $t = \sqrt{2s/a}$, kde t je čas od počátku pohybu do okamžiku, kdy je uražená dráha rovna s. Pro t_3 pak platí

$$t_3 = \sqrt{\frac{2(s + 2l)}{a}} - \sqrt{\frac{2(s + l)}{a}} =$$

$$= \frac{\sqrt{(t_1^2 + t_2^2)^2 + 8t_1t_2(t_1^2 - t_2^2)} - \sqrt{(t_1^2 + t_2^2)^2 + 4t_1t_2(t_1^2 - t_2^2)}}{2(t_1 - t_2)} = 18{,}8\ \mathrm{s}\,.$$

(Konečný výraz je příliš komplikovaný. Pro numerický výpočet je vhodnější výraz obsahující s a l.)

3 body

2. a) Amplitudy rychlosti a zrychlení jsou

$$v_{\mathrm{m}} = \omega y_{\mathrm{m}} = 2\pi f y_{\mathrm{m}} = 3{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}\,, \qquad a_{\mathrm{m}} = \omega^2 y_{\mathrm{m}} = (2\pi f)^2 y_{\mathrm{m}} = 76\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}\,.$$

2 body

b) Pro souřadnice okamžité rychlosti a okamžitého zrychlení platí

$$v = v_{\mathrm{m}} \cos \omega t\,, \qquad a = -a_{\mathrm{m}} \sin \omega t\,.$$

Je-li $y = \frac{y_{\mathrm{m}}}{2}$, pak $\sin \omega t = \frac{y}{y_{\mathrm{m}}} = \frac{1}{2}$. Při pohybu vzhůru je

$$\omega t = \frac{\pi}{6} + 2n\pi\,, \qquad \cos \omega t = \frac{\sqrt{3}}{2}\,, \qquad v = 2{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}\,.$$

Při pohybu dolů je

$$\omega t = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi\,, \qquad \cos \omega t = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,, \qquad v = -2{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}\,.$$

V obou případech $a = -38\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

3 body

c) V okamžiku, kdy výchylka poprvé dosáhne $y_{\mathrm{m}}/2$ je

$$\omega t = 2\pi f t = \frac{\pi}{6}\,, \qquad t = \frac{1}{12f} = 0{,}021\ \mathrm{s}\,.$$

2 body

d) Pro tuhost pružiny platí $k = m\omega^2$. Kinetická a potenciální energie soustavy jsou v poměru

$$\frac{E_{\mathrm{k}}}{E_{\mathrm{p}}} = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{\frac{1}{2}ky^2} = \frac{\frac{1}{2}m(\omega y_{\mathrm{m}} \cos \omega t)^2}{\frac{1}{2}m\omega^2 (y_{\mathrm{m}} \sin \omega t)^2} = \mathrm{cotg}^2 \omega t = 3\,.$$

2 body

3. a) Vzduch přijme teplo

$$Q = P\tau = 500\ \mathrm{J}\,.$$

1 bod

b) Izobarický děj probíhá při tlaku

$$p = p_0 + \frac{m_z g}{S} = 1{,}098 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa}\,.$$

Hmotnost vzduchu určíme ze stavové rovnice:

$$\frac{pV_1}{T_1} = \frac{m}{M_\mathrm{m}} R\,, \qquad m = \frac{pSh_1 M_\mathrm{m}}{RT_1} = 1{,}28 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg}\,.$$

Platí $Q = mc_p(T_2 - T_1)$. Výsledná teplota je

$$T_2 = T_1 + \frac{Q}{mc_p} = T_1 + \frac{P\tau}{mc_p} = 689\ \mathrm{K}\,, \qquad t_2 = 416\ ^\circ\mathrm{C}\,.$$

3 body

c) Při izobarickém ději platí

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{T_2}{T_1}\,. \quad \text{Z toho} \quad h_2 = h_1 \frac{T_2}{T_1} = 0{,}23\ \mathrm{m}\,.$$

2 body

d) Vzduch vykoná práci

$$W' = p(V_2 - V_1) = pS(h_2 - h_1) = 143\ \mathrm{J}\,.$$

2 body

e) Změnu vnitřní energie určíme ze vztahu

$$\Delta U = Q - W' = 357\ \mathrm{J}\,.$$

2 body

4. Na roztání ledu o hmotnosti m se spotřebuje skupenské teplo

$$L_{\mathrm{t}} = ml_{\mathrm{t}} = 13\,360\ \mathrm{J} \doteq 13\ \mathrm{kJ}\,.$$

2 body

Stejně velké teplo Q za dobu τ projde tyčí. Tepelný výkon je

$$P = \frac{Q}{\tau} = \frac{L_{\mathrm{t}}}{\tau} = 22\ \mathrm{W}\,.$$

2 body

Pro teplo Q, které za dobu τ projde tyčí, platí

$$Q = \frac{\lambda S(t_1 - t_0)\tau}{l}\,.$$

3 body

Z toho

$$t_1 = t_0 + \frac{Ql}{\lambda S\tau} \doteq 3{,}0 \cdot 10^2\ {}^\circ\mathrm{C}\,.$$

3 body