Řešení úloh 1. kola 43. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie C*

Autoři úloh: I. Volf (1, 7), J. Jírů (4, 5), R. Horáková (3), P. Šedivý (2) a V. Vícha (6)

1. a) Pohyb puku je rovnoměrně zpomalený se zrychlením o velikosti

$$a = \frac{F_\mathrm{t}}{m} = \frac{fmg}{m} = fg = 1{,}47\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} \doteq 1{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}\,.$$

Před odrazem od hrazení jsou velikost rychlosti puku a jeho vzdálenost od hrazení popsány vztahy:

$$v = v_0 - at\,, \qquad d = d_0 - v_0 t + \frac{1}{2}at^2\,.$$

V okamžiku odrazu platí $d = 0$,

$$t = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2ad_0}}{a} = \left\langle \begin{array}{l} 18{,}9\ \mathrm{s}\,, \\ 2{,}88\ \mathrm{s}\,. \end{array} \right.$$

Úloze vyhovuje menší kořen $t_1 = 2{,}88$ s. Rychlost dopadu puku na hrazení je $v_1 = v_0 - at_1 = 11{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

—————

Řešení na základě rovnosti úbytku kinetické energie puku a práce vykonané při překonání tření. Platí:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgfd_0\,, \qquad v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gfd_0} = 11{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}\,,$$

$$t_1 = \frac{v_0 - v_1}{a} = \frac{v_0 - v_1}{gf} = 2{,}88\ \mathrm{s}\,.$$

—————

Během odrazu se velikost rychlosti puku změní na $v_2 = 0{,}7v_1 = 8{,}24\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Po odrazu popisuje závislost velikosti rychlosti puku na čase vztah

$$v = v_2 - a(t - t_1)\,.$$

Rychlost útočníka $v_\text{ú}$ je konstantní. Grafy rychlosti útočníka a puku jsou na obr. R1. **3 body**

b) V okamžiku odrazu je útočník ve vzdálenosti $d_1 = d_0 - v_\text{ú} t_1 = 31{,}4$ m. Označme $\tau = t - t_1$ čas, který uplynul od odrazu puku. Vzdálenosti puku a útočníka od hrazení závisí na čase τ podle vztahů

$$d_\mathrm{t} = v_2\tau - \frac{1}{2}a\tau^2\,, \qquad d_\text{ú} = d_1 - v_\text{ú}\tau\,.$$

Puk se po odrazu zastaví působením tření za brzdnou dobu

$\tau_\mathrm{b} = \dfrac{v_2}{a} = 5{,}60$ s ve vzdálenosti $d_\mathrm{b} = \dfrac{v_2^2}{2a} = 23$ m od hrazení. Z grafů dráhy na obr. R2 je zřejmé, že útočník dostihne puk před jeho zastavením. **3 body**

c) Řešením rovnice

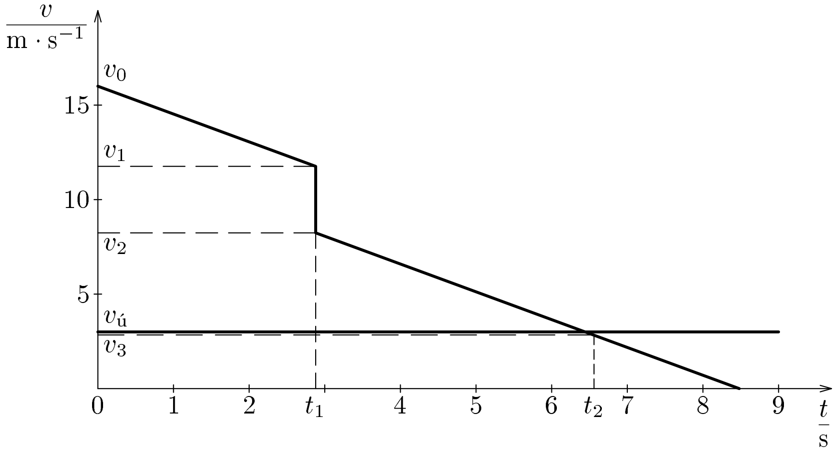
$$d_\mathrm{t} = v_2\tau - \frac{1}{2}a\tau^2 = d_\mathrm{ú} = d_1 - v_\mathrm{ú}\tau$$

dostaneme:

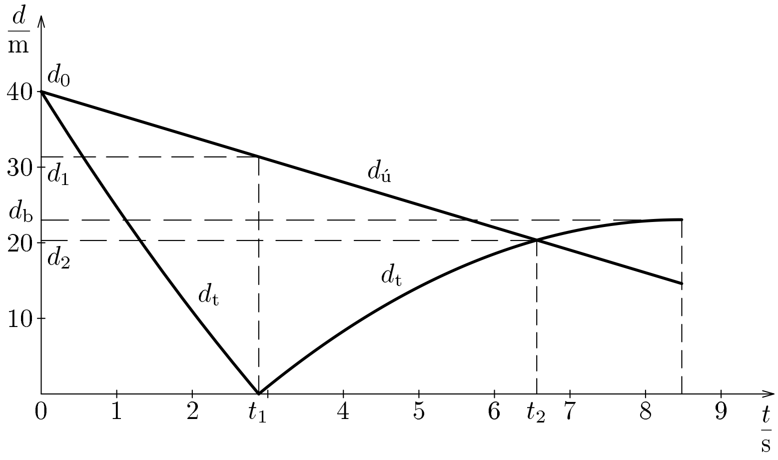
$$\tau = \frac{(v_\mathrm{ú} + v_2) \pm \sqrt{(v_\mathrm{ú} + v_2)^2 - 2ad_1}}{a} = \left\langle \begin{array}{l} 11{,}6\ \mathrm{s}\,, \\ 3{,}67\ \mathrm{s}\,. \end{array} \right.$$

Úloze vyhovuje menší kořen $\tau_2 = 3{,}67$ s. Útočník dostihne puk v čase $t_2 = t_1 + \tau_2 = 6{,}6$ s ve vzdálenosti $d_2 = d_1 - v_\mathrm{ú}\tau_2 = 20{,}3$ m od zadního hrazení. **3 body**

d) V čase t_2 je velikost rychlosti puku $v_3 = v_2 - a\tau_2 = 2{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a relativní rychlost útočníka a puku má velikost $v_\mathrm{r} = v_\mathrm{ú} + v_3 = 5{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. **1 bod**



Obr. R1



Obr. R2

2. *Grafické řešení (Obr. R3)*

Nejprve nahradíme tíhovou sílu tyče $\boldsymbol{F}_1$ působící v jejím středu S a tíhu břemene $\boldsymbol{F}_2$ působící v bodě B jedinou silou $\boldsymbol{F}$ o velikosti $F = F_1 + F_2$. Působiště P, nalezneme známou konstrukcí na základě vztahu $|PS| : |PB| = F_2 : F_1$. Počet sil působících na tyč tím zredukujeme na tři. Protože jsou v rovnováze, procházejí jejich vektorové přímky společným bodem Q, který nalezneme jako průsečík přímky CD s vektorovou přímkou síly $\boldsymbol{F}$. Síla $\boldsymbol{F}_A$ má směr přímky AQ.

Vektorový součet sil $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F}_A$ a $\boldsymbol{F}_C$ je nulový. Tyto síly musí tedy tvořit uzavřený obrazec – trojúhelník určený podle věty *usu*, který sestrojíme v určitém měřítku jako pomocný obrázek. Z něj můžeme odměřit velikosti sil $\boldsymbol{F}_A$ a $\boldsymbol{F}_C$.

5 bodů

Početní řešení (zaokrouhlíme až konečný výsledek)

Označme vodorovné a svislé souřadnice sil $\boldsymbol{F}_A$, $\boldsymbol{F}_C$ jako F_{Ax}, F_{Ay}, F_{Cx}, F_{Cy}. Podle momentové věty pro osu v bodě A platí

$$F_{Cy} \cdot |AC| = F_1 \cdot |AS| + F_2 \cdot |AB| \,, \quad F_{Cy} = \frac{m_1 g \cdot |AS| + m_2 g \cdot |AB|}{|AC|} = 367{,}5 \text{ N} \,.$$

Z podobnosti trojúhelníků plyne

$$\frac{-F_{Cx}}{F_{Cy}} = \frac{|AC|}{|AD|} \,, \qquad F_{Cx} = -\frac{|AC|}{|AD|} F_{Cy} = -275{,}625 \text{ N} \,.$$

Z podmínek rovnováhy dostaneme

$$F_{Ax} = -F_{Cx} = 275{,}625 \text{ N} \,, \qquad F_{Ay} = F_1 + F_2 - F_{Cy} = -122{,}5 \text{ N} \,.$$

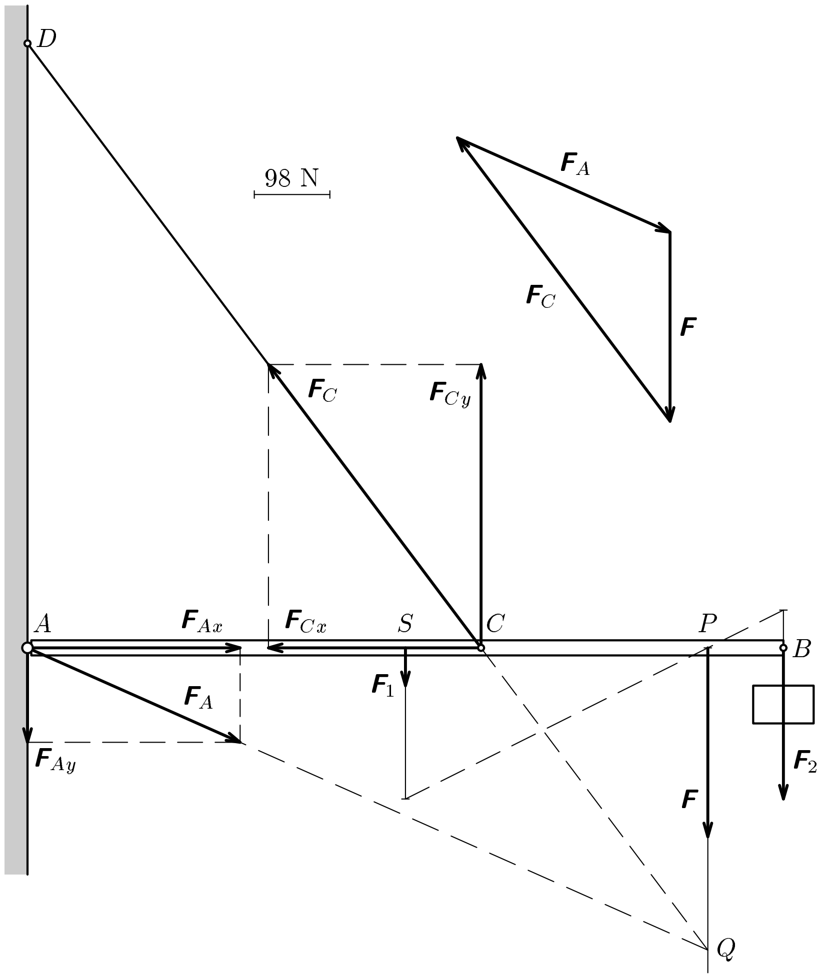
Velikosti sil $\boldsymbol{F}_A$ a $\boldsymbol{F}_C$ jsou

$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} \doteq 300 \text{ N} \,, \qquad F_C = \sqrt{F_{Cx}^2 + F_{Cy}^2} \doteq 460 \text{ N} \,.$$

Síla, kterou stěna působí na tyč v bodě A, směřuje šikmo dolů pod úhlem

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{F_{Ay}}{F_{Ax}} = -24^\circ \,.$$

5 bodů



Obr. R3

3. a) Velikost síly, kterou působí na víko vzduch uvnitř sklenice, označme F_1, velikost síly, kterou působí okolní vzduch, označme F_2. Výsledná síla má velikost

$$F = F_2 - F_1 = \frac{\pi}{4}(p_2 d_2^2 - p_1 d_1^2) = 626\ \mathrm{N}\,.$$

2 body

b) Pro tlak na styčné ploše víka a sklenice platí $p = \dfrac{F}{S}$, kde $S = \dfrac{\pi}{4}(d_2^2 - d_1^2)$.

$$p = \frac{d_2^2 p_2 - d_1^2 p_1}{d_2^2 - d_1^2} = 0{,}42\ \mathrm{MPa}\,.$$

2 body

c) Lineární interpolací tabulkových hodnot atmosférického tlaku v nadmořských výškách 8 024 m a 9 073 m určíme atmosférický tlak v nadmořské výšce Mount Everestu 8 850 m: $p_3 = 0{,}311 \cdot 10^5$ Pa. V této výšce působí na víko sklenice směrem dovnitř výsledná síla o velikosti

$$F' = F_3 - F_1 = \frac{\pi}{4}(p_3 d_2^2 - p_1 d_1^2) = 85\ \mathrm{N}\,.$$

Protože výsledek výpočtu je kladný, sklenice se neotevře.

3 body

d) Sklenice se otevře v okamžiku, kdy je výslednice sil působících na víko začne působit ven. To nastane, jestliže

$$p_2 < \frac{d_1^2}{d_2^2} p_1 = 0{,}202 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa}\,.$$

V tabulkách je tlak 200 hPa uveden pro nadmořskou výšku 11 686 m. Přibližně v této výšce a vyšších nadmořských výškách by se sklenice samovolně otevřela.

3 body

4. Zaveďme označení údajů nalezených v tabulkách:
průměr Slunce $D = 1\,391\,000\,\mathrm{km}$, průměr Venuše $d = 12\,100\,\mathrm{km}$,
střední vzdálenost Země od Slunce $r_0 = 1\ \mathrm{AU} = 149\,600\,000\,\mathrm{km}$,
střední vzdálenost Venuše od Slunce $r = 0{,}7233\ \mathrm{AU}$,
periodu oběhu Země $T_0 = 365{,}24\ \mathrm{d}$ a periodu oběhu Venuše $T = 224{,}7\ \mathrm{d}$.

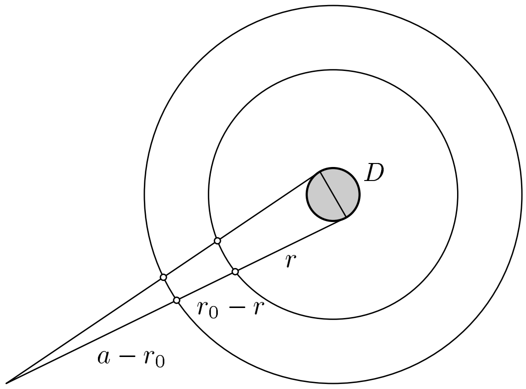
a) Průměry Venuše a Slunce uvidíme v době přechodu pod zornými úhly

$$\alpha_1 = \frac{d}{r_0 - r}\,, \qquad \alpha_2 = \frac{D}{r_0}\,.$$

Hledaný poměr je $$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{r_0 d}{(r_0 - r)D} = 0{,}031\,.$$ **2 body**

b) Označme a vzdálenost od Slunce, ve které se nachází průsečík přímek spojujících středy obou planet na začátku a na konci přechodu (obr. R4). Dále označme v_0, v po řadě kruhové rychlosti, se kterými obíhá Země a Venuše kolem Slunce a Δt dobu trvání přechodu. Podle obrázku je

$$\frac{D}{a} = \frac{v_0 \Delta t}{a - r_0} = \frac{v \Delta t}{a - r}\,.$$



Obr. R4

Z rovnosti 2. a 3. výrazu plyne

$$a = \frac{v r_0 - v_0 r}{v - v_0}\,. \tag{1}$$

Z rovnosti 1. a 2. výrazu za použití rovnice (1) dostaneme

$$\Delta t = D\frac{r_0 - r}{v r_0 - v_0 r}\,.$$

Dosazením

$$v_0 = \frac{2\pi r_0}{T_0}\,, \qquad v = \frac{2\pi r}{T}$$

dostaneme konečný výsledek

$$\Delta t = \frac{D(r_0 - r)}{2\pi r r_0}\,\frac{T_0 T}{T_0 - T} = 7{,}93\ \mathrm{h} = 7\ \mathrm{h}\ 56\ \mathrm{min}\,.$$

4 body

c) Hledáme dobu ΔT, po jejímž uplynutí se Země a Venuše opět ocitnou na polopřímce s počátečním bodem ve středu Slunce. Platí

$$\frac{2\pi}{T}\Delta T = \frac{2\pi}{T_0}\Delta T + 2\pi\,, \qquad \Delta T = \frac{T_0 T}{T_0 - T} = 584\ \text{dnů}\,.$$

Pokud by byly splněny zjednodušující podmínky, nastal by předcházející přechod 2. listopadu 2002.

3 body

d) Rovina trajektorie Venuše je vzhledem k ekliptice skloněna o úhel 3,4°, čímž se v době možného přechodu při pohledu ze Země Venuše většinou neocitne na pozadí slunečního disku, nýbrž nad ním nebo pod ním.

1 bod

Poznámka: Skutečný přechod přes sluneční disk nastává střídavě po 121,5 a 8,0 letech. Po uvedeném datu 8. 6. 2004 následuje další přechod 6. 6. 2012.

5.a) Na obou stranách je stejné látkové množství plynu n. Při změně teploty T se kapka vychýlí tak, aby tlak p na obou stranách byl stejný. Platí

$$p = \frac{nRT}{V_0 + Sx} = \frac{nRT_0}{V_0 - Sx}\,, \qquad T = \frac{V_0 + Sx}{V_0 - Sx}T_0\,. \tag{2}$$

3 body

b) Krajní teploty naměříme, je-li kapka na jednom nebo druhém konci trubičky. Tedy

$$T_{\max} = \frac{V_0 + Sl}{V_0 - Sl}T_0 = 315{,}4\ \mathrm{K}\,, \qquad T_{\min} = \frac{V_0 - Sl}{V_0 + Sl}T_0 = 285{,}4\ \mathrm{K}\,.$$

3 body

c) Stupnice je nerovnoměrná, neboť T je lineární lomenou funkcí x.

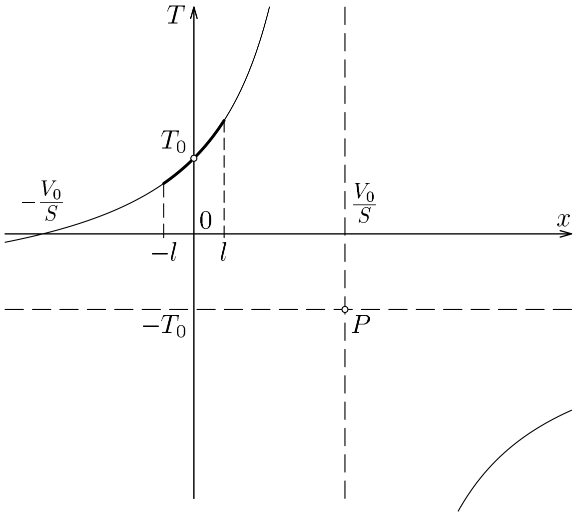
1 bod

d) Rovnici (2) upravíme:

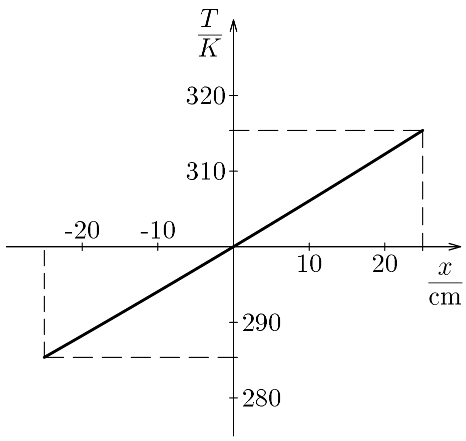
$$T = \frac{V_0 + Sx}{V_0 - Sx}T_0 = -\frac{x + \frac{V_0}{S}}{x - \frac{V_0}{S}}T_0 = -\frac{x - \frac{V_0}{S} + 2\frac{V_0}{S}}{x - \frac{V_0}{S}}T_0 = \frac{-2\frac{V_0}{S}T_0}{x - \frac{V_0}{S}} - T_0\,.$$

Grafem je část hyperboly s definičním oborem $x \in \langle -l, l\rangle$. Střed hyperboly je bod $P = \left[\frac{V_0}{S}, -T_0\right]$. Obecný nákres je na obr. R5. Z grafu vyplývá, že stupnice se zhušťuje od $x = -l$ do $x = l$.
Je-li $V_0 \gg lS$, můžeme stupnici považovat téměř za rovnoměrnou.
Při daných číselných hodnotách je $lS = 0{,}025V_0$. Na levé půlce trubičky naměříme teplotní rozdíl 14,6 K, na pravé půlce 15,4 K (obr. R6).

3 body



Obr. R5



Obr. R6

Poznámka: Po úpravě

$$T = \frac{V_0 + Sx}{V_0 - Sx} T_0 = \frac{(V_0 + Sx)^2}{V_0^2 - S^2x^2} T_0 = \frac{V_0^2 + 2V_0Sx + S^2x^2}{V_0^2 - S^2x^2} T_0$$

a zanedbání kvadratických členů S^2x^2 vzhledem k V_0 dostaneme

$$T \approx T_0 + T_0 \frac{2S}{V_0} x = (300 + 60\{x\})\ \mathrm{K}\,, \quad x \in \langle -l, l \rangle\,.$$

6. Ukázka typického měření vlasů dvou osob

	$\frac{d}{10^{-2}\ \mathrm{mm}}$	$\frac{l_0}{\mathrm{mm}}$	$\frac{\Delta l}{\mathrm{mm}}$	$\frac{F}{\mathrm{N}}$	$\frac{\varepsilon}{\%}$	$\frac{\sigma_\mathrm{p}}{\mathrm{MPa}}$	Arit. prům.
1. vlas osoby A	7,5	102	30	0,75	29	220	248 MPa
2. vlas osoby A	7,5	165	45	0,90	27	259	
3. vlas osoby A	7,5	126	48	0,85	38	266	
1. vlas osoby B	5,5	115	45	0,49	39	287	253 MPa
2. vlas osoby B	5,5	115	35	0,39	30	214	
3. vlas osoby B	5,5	125	45	0,45	36	258	

Mez pevnosti vlasů je srovnatelná např. s šedou litinou (200 MPa až 560 MPa), duralem (150 MPa až 520 MPa), mědí (180 MPa až 450 MPa), zinkem (120 MPa až 500 MPa).

Mez pevnosti vlasů je větší než např. u hliníku (70 MPa až 190 MPa), cínu (30 MPa až 70 MPa), olova (15 MPa až 20 MPa), skla (30 MPa až 90 MPa).

Maximální relativní prodloužení se pohybuje zhruba mezi 30 % a 40 %. Vlas je tedy nejen velmi pevný, ale i velmi pružný.

Pokud přijmeme údaj, že člověk má na hlavě průměrně 100 000 vlasů, unesl by cop osoby A závaží o hmotnosti 8,5 t a u osoby B závaží 4,5 t.

7.a) Skupenské teplo potřebné na vyvaření 30 g vody je

$$L_\mathrm{v} = ml_\mathrm{v} = 0{,}030\mathrm{kg} \cdot 2\,300\ \mathrm{kJ} \cdot \mathrm{kg}^{-1} = 69\ \mathrm{kJ}\,.$$

Výkon vařiče je

$$P = \frac{L_\mathrm{v}}{\tau} = \frac{69\ \mathrm{kJ}}{60\ \mathrm{s}} = 1\,150\ \mathrm{W}.$$

Zahřívání probíhá s účinností

$$\eta = \frac{P}{P_0} = \frac{ml_\mathrm{v}}{\tau P_0} = \frac{1\,150\ W}{1\,800\ \mathrm{W}} = 0{,}64 = 64\ \%$$

3 body

b) Pro vedení tepla dnem nádoby platí

$$P = \frac{\lambda_\mathrm{Al} S \Delta t}{x}\,,$$

kde Δt je rozdíl teplot na vnější a vnitřní straně dna, S plošný obsah dna a x tloušťka dna.

$$\Delta t = \frac{Px}{\lambda_\mathrm{Al} S} = \frac{1\,150\ \mathrm{W} \cdot 0{,}0025\ \mathrm{m}}{210\ \mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{K}^{-1} \cdot 0{,}020\ \mathrm{m}^2} \doteq 0{,}7\ \mathrm{K}\,.$$

Na vnější straně dna bude teplota 100,7 °C.

4 body

c) Podobně pro rozdíl $\Delta t'$ teplot na vnější a vnitřní straně vrstvy vodního kamene platí

$$\Delta t' = \frac{Px'}{\lambda_\mathrm{k} S} = \frac{1\,150\ \mathrm{W} \cdot 0{,}0005\ \mathrm{m}}{2{,}33\ \mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{K}^{-1} \cdot 0{,}020\ \mathrm{m}^2} = 12{,}3\ \mathrm{K}\,.$$

Celkový rozdíl teplot mezi vroucí vodou a vnější stranou dna nádoby pak je $\Delta t + \Delta t' = 13$ K. Na vnější straně dna nádoby zanesené vodním kamenem je teplota 113 °C.

3 body