Řešení úloh regionálního kola 44. ročníku fyzikální olympiády.

Kategorie B

Autoři úloh: P. Šedivý (1, 4), J. Jírů (2), M. Randa (3)

1. a) Kondenzátor o kapacitě C_1 se nabije na napětí U. Rezistorem projde náboj $Q_1 = C_1U = 5{,}0$ mC a kondenzátor získá energii

$$E_{C1} = \frac{1}{2}Q_1U = \frac{1}{2}C_1U^2 = 25\ \mathrm{mJ}\,.$$

Práce zdroje přitom je $W_z = UQ_1 = C_1U^2 = 50$ mJ. V rezistoru se spotřebuje práce

$$W_1 = W_z - E_{C1} = C_1U^2 - \frac{1}{2}C_1U^2 = \frac{1}{2}C_1U^2 = 25\ \mathrm{mJ}\,.$$

4 body

b) Náboj na kondenzátoru o kapacitě C_1 se zmenší na $Q_1 - Q_2$. Platí:

$$\frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} = \frac{C_2}{C_1} \quad \Rightarrow \quad Q_2 = Q_1\frac{C_2}{C_1 + C_2} = 0{,}8Q_1 = 4{,}0\ \mathrm{mC}\,.$$

2 body

Napětí na kondenzátorech poklesne na

$$U' = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_1 - Q_2}{C_1} = \frac{Q_1}{C_1 + C_2} = \frac{C_1}{C_1 + C_2}U = 2{,}0\ \mathrm{V}$$

a celková energie soustavy kondenzátorů bude

$$E'_{C1} + E'_{C2} = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)U'^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{C_1^2}{C_1 + C_2}\cdot U^2\,.$$

Práce W_2 bude rovna úbytku elektrické energie soustavy kondenzátorů:

$$W_2 = E_{C1} - E'_{C1} - E'_{C2} = \frac{1}{2}C_1U^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{C_1^2}{C_1 + C_2}\cdot U^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}\cdot U^2 = 20\ \mathrm{mJ}\,.$$

4 body

Všechny výsledky jsou nezávislé na velikosti odporu R.

2. a) Zvolme hladinu nulové potenciální tíhové energie na hladině vody. Podle zákona zachování energie je potenciální tíhová energie skokana na mostě rovna potenciální energii pružnosti lana v nejnižší poloze skokana:

$$mgh = \frac{1}{2}k(h-l)^2 . \quad \text{Z toho} \quad k = \frac{2mgh}{(h-l)^2} = 70\ \mathrm{N \cdot m^{-1}} . \tag{1}$$

2 body

b) Označme Δl prodloužení lana po ustálení. Platí $mg = k\Delta l$. Po dosazením z (1) dostaneme

$$\Delta l = \frac{(h-l)^2}{2h} . \tag{2}$$

Po ustálení se skokan bude nacházet ve výšce

$$h_1 = h - (l + \Delta l) = \frac{2h^2 - 2hl - (h-l)^2}{2h} = \frac{h^2 - l^2}{2h} = 19\ \mathrm{m} \tag{3}$$

2 body

c) Rychlost je maximální v okamžiku, kdy výslednice tíhové síly a síly pružného lana je nulová, tedy ve výšce h_1, kde prodloužení lana je Δl. Z rovnosti potenciální energie skokana na mostě a jeho celkové mechanické energie ve výšce h_1 nad hladinou dostaneme rovnici

$$mgh - mgh_1 = mg(l + \Delta l) = \frac{1}{2}mv_\mathrm{m}^2 + \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 ,$$

z níž užitím vztahů (1) a (2) získáme hledanou maximální rychlost

$$v_\mathrm{m} = (h+l)\sqrt{\frac{g}{2h}} = 17{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} .$$

Výsledek lze též dostat z rovnice pro harmonické kmity

$$v_\mathrm{m} = y_\mathrm{m}\omega = h_1\sqrt{\frac{k}{m}}$$

užitím vztahů (1) a (3). **3 body**

d) Zpomalený pohyb z výšky h_1 na hladinu představuje čtvrtperiodu harmonického pohybu s úhlovou frekvencí $\omega = \sqrt{k/m}$ a s maximální výchylkou h_1. Velikost zrychlení pohybu je největší při maximální výchylce, tedy v nejnižší poloze skokana: $a_\mathrm{m} = \omega^2 h_1$. V neinerciální vztažné soustavě spojené se skokanem na něj působí tíhová síla ve směru dolů a setrvačná síla proti směru okamžitého zrychlení soustavy. V uvažované nejnižší poloze setrvačná síla směřuje rovněž dolů. Přetížení je

$$\frac{mg + ma_\mathrm{m}}{m} = \frac{k}{m}h_1 + g = \frac{2gh}{(h-l)^2} \cdot \frac{h^2 - l^2}{2h} + g = \frac{h+l}{h-l}g + g = \frac{2h}{h-l}g = \frac{8}{3}g .$$

3 body

3. a) Celková práce je v obou případech stejná a je rovna obsahu plochy v p-V diagramu:

$$W'_{1231} = W'_{1341} = \frac{1}{2}V_1 \cdot 2p_1 = p_1V_1\,, \qquad W'_{1231} : W'_{1341} = 1\,.$$

1 bod

b) Určíme teploty ve stavech 1, 2, 3, 4:

$$T_1 = \frac{p_1V_1}{nR}, \quad T_2 = 3T_1, \quad T_3 = 6T_1, \quad T_4 = 2T_1.$$

Změny vnitřní energie při jednotlivých dějích:

$$\Delta U_{12} = C_V \cdot \Delta T_{12} = \frac{3}{2}nR(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}nR \cdot 2T_1 = 3nR \cdot \frac{p_1V_1}{nR} = 3p_1V_1\,,$$

$$\Delta U_{23} = \frac{3}{2}nR \cdot 3T_1 = \frac{9}{2}p_1V_1\,, \qquad \Delta U_{31} = \frac{3}{2}nR \cdot (-5T_1) = -\frac{15}{2}p_1V_1\,,$$

$$\Delta U_{13} = \frac{15}{2}p_1V_1\,, \qquad \Delta U_{34} = -6p_1V_1\,, \qquad \Delta U_{41} = -\frac{3}{2}p_1V_1\,.$$

V cyklu 1231 je teplo dodáváno při dějích 12 a 23:
$Q_{1231} = \Delta U_{12} + W'_{12} + \Delta U_{23} + W'_{23} = 3p_1V_1 + 0 + \frac{9}{2}p_1V_1 + 3p_1V_1 = \frac{21}{2}p_1V_1\,.$
V cyklu 1341 je teplo dodáváno jen při ději 13:

$$Q_{1341} = \Delta U_{13} + W'_{13} = \frac{15}{2}p_1V_1 + 2p_1V_1 = \frac{19}{2}p_1V_1\,.$$

Tepla jsou v poměru $\dfrac{Q_{1231}}{Q_{1341}} = \dfrac{21}{19}$.

3 body

c) Účinnost cyklu 1231 je $\eta_{1231} = \dfrac{W_{1231'}}{Q_{1231}} = \dfrac{p_1V_1}{\frac{21}{2}p_1V_1} = \dfrac{2}{21}\,.$

Účinnost cyklu 1341 je $\eta_{1341} = \dfrac{W_{1341'}}{Q_{1341}} = \dfrac{p_1V_1}{\frac{19}{2}p_1V_1} = \dfrac{2}{19}\,.$

Účinnosti jsou v poměru $\dfrac{\eta_{1231}}{\eta_{1341}} = \dfrac{19}{21}\,.$

2 body

d) Při dějích 23 a 41 je tlak konstantní, při dějích 12 a 34 je tlak přímo úměrný termodynamické teplotě. Závislost tlaku na teplotě je nelineární při ději 13, kde platí

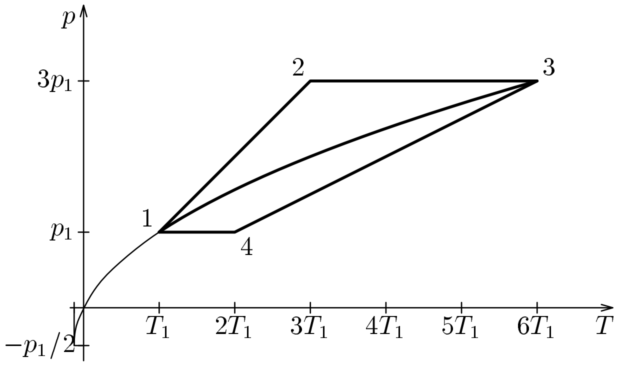
$$\frac{V - V_1}{p - p_1} = \frac{V_1}{2p_1}\,, \qquad V = V_1 + \frac{V_1}{2p_1}(p - p_1)\,,$$

$$nRT = pV = pV_1 + \frac{pV_1}{2p_1}(p - p_1) = \frac{V_1}{2p_1}p^2 + \frac{V_1}{2}p\,, \qquad T = \frac{1}{nR}\left(\frac{V_1}{2p_1}p^2 + \frac{V_1}{2}p\right)\,.$$

Dostali jsme rovnici paraboly, která prochází počátkem grafu a body 1 a 3. Další úpravou dostaneme

$$T = \frac{p_1V_1}{2nR}\left(\frac{p}{p_1}\right)^2 + \frac{p_1V_1}{2nR}\frac{p}{p_1} = \frac{T_1}{2}\left(\frac{p}{p_1}\right)^2 + \frac{T_1}{2}\frac{p}{p_1} = \frac{T_1}{2}\left(\frac{p}{p_1}+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{T_1}{8}\,.$$

Vrchol paraboly je v bodě $\left[-\frac{T_1}{8}, -\frac{p_1}{2}\right]$.



4 body

4. a) Přetlak oproti atmosférickému tlaku je vyvolán tíhou zařízení.

$$p = \frac{F_G}{S} = \frac{4mg}{\pi d^2} = 9{,}75 \cdot 10^5 \text{ Pa}\,.$$

Ve válci je tlak $p_1 = p + p_\mathrm{b} = 10{,}75 \cdot 10^5$ Pa.

1 bod

b) Vzroste-li teplota z t_1 na t_2, absolutní teplota z T_1 na T_2, dojde ve válci k izobarickému ději. Zvětšení objemu oleje a vzduchu způsobí vysunutí pístu:

$$\left[\frac{\pi D^2}{4}(L-v) - \frac{\pi d^2}{4}l\right]\beta\Delta t + \frac{\pi D^2}{4}v\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) = \frac{\pi d^2}{4}h\,,$$

$$h = \frac{D^2(L-v)\beta\Delta t}{d^2} - l\beta\Delta t + \frac{D^2 v\Delta t}{d^2 T_1} = 0{,}066 \text{ m} = 6{,}6 \text{ cm}\,.$$

4 body

c) Poklesne-li teplota z t_1 na t_3, absolutní teplota z T_1 na T_3, zmenší se objem oleje a zvětší se objem vzduchu:

$$V_1 - V_3 = \frac{\pi D^2}{4}(v' - v) = \left[\frac{\pi D^2(L-v)}{4} - \frac{\pi d^2 l}{4}\right]\beta(t_1 - t_3)\,,$$

$$v' = v + \left(L - v - \frac{d^2 l}{D^2}\right)\beta(t_1 - t_3) = 0{,}00837 \text{ m} = 8{,}37 \text{ mm}\,.$$

Ze stavové rovnice $\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_3 V_3}{T_3}$ dostaneme

$$p_3 = \frac{p_1 T_3 V_1}{T_1 V_3} = \frac{p_1 T_3 v}{T_1 v'} = 1{,}73 \cdot 10^5 \text{ Pa}\,.$$

Přetlak ve válci poklesne na $p' p_3 - p_\mathrm{b} = 0{,}73 \cdot 10^5$ Pa.

4 body

d) V důsledku zvýšení teploty z t_1 na t_2 se poněkud zvětší i objem ocelového válce a vysunutí pístu z válce bude menší, než jsme předpokládali v b). Teplotní součinitel objemové roztažnosti oceli je $3\alpha = 36 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{K}^{-1}$, což je asi 5 % teplotního součinitele objemové roztažnosti oleje β. Proto výška h, do které válec vystoupí, bude asi o 5 % menší, než jsme vypočítali v části b).

1 bod