Řešení úloh 1. kola 44. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie B*

Autoři úloh: B. Vybíral (1), I. Volf (2), V. Vícha a P. Šedivý (3), P. Šedivý (4, 5, 7), K. Rauner a P. Šedivý (6)

1. a) Podle zákona zachování hybnosti je počáteční rychlost hlavně

$$v_0 = v_1 \frac{m_1}{m_0}\,.$$

V případě bez tlumiče plyne ze zákona zachování mechanické energie

$$\frac{1}{2}m_0 v_0^2 = \frac{1}{2}kA_0^2\,, \qquad A_0 = v_0\sqrt{\frac{m_0}{k}} = \frac{m_1 v_1}{\sqrt{km_0}} = 1{,}00\ \mathrm{m}\,.$$

Je-li připojen tlumič, je $A = \beta A_0 = 0{,}650$ m. **3 body**

b) Maximální potenciální energie při použití tlumiče je

$$E_{\mathrm{pmax}} = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}k(\beta A_0)^2 = \beta^2 E_{\mathrm{m0}}\,,$$

kde E_{m0} je počáteční mechanická energie hlavně. Energie pohlcená v tlumiči během zákluzu A je

$$\Delta E_{\mathrm{m}} = (1-\beta^2)E_{\mathrm{m0}} = (1-\beta^2)\frac{m_0 v_0^2}{2} = (1-\beta^2)\frac{m_1^2 v_1^2}{2m_0} = 1{,}88\cdot 10^4\ \mathrm{J}\,.$$

4 body

c) V bodě obratu je $v = 0$ a na hlaveň působí pouze síla stlačené pružiny. Z pohybové rovnice $m_0 a_0 = k\beta A_0$ plyne

$$a_0 = \frac{k\beta A_0}{m_0} = \frac{k\beta m_1 v_1}{\sqrt{km_0^3}} = \beta m_1 v_1\sqrt{\frac{k}{m_0^3}} = 26{,}4\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,.$$

3 body

2. a) Rychlost a periodu kosmické lodi, která se pohybuje po kruhové trajektorii, určíme pomocí vztahů

$$v = \sqrt{\frac{\varkappa M_{\mathrm{Z}}}{r}}\,, \qquad T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{\varkappa M_{\mathrm{Z}}}}\,.$$

Po dosazení:
$v_{\mathrm{A}} = 7{,}6$ km/s, $v_{\mathrm{B}} = 3{,}1$ km/s, $T_{\mathrm{A}} = 5\,820\ \mathrm{s} \doteq 1{,}62$ h, $T_{\mathrm{B}} = 85\,500\ \mathrm{s} \doteq 23{,}7$ h.
Druhá loď je takřka na stacionární dráze. **2 body**

b) Eliptická trajektorie má

$r_{\mathrm{p}} = r_A = 7\,000$ km, $r_a = r_B = 42\,000$ km, $a = \dfrac{r_{\mathrm{p}} + r_{\mathrm{a}}}{2} = 24\,500$ km.

Z druhého Keplerova zákona a ze zákona zachování energie plyne:

$$v_\mathrm{p} r_\mathrm{p} = v_\mathrm{a} r_\mathrm{a}\,, \qquad \frac{1}{2} m v_\mathrm{p}^2 - \frac{\varkappa M_\mathrm{Z} m}{r_\mathrm{p}} = \frac{1}{2} m v_\mathrm{a}^2 - \frac{\varkappa M_\mathrm{Z} m}{r_\mathrm{a}}\,.$$

Řešením soustavy rovnic dostaneme:

$$v_\mathrm{p} = \sqrt{\frac{2\varkappa M_\mathrm{Z} r_\mathrm{a}}{r_\mathrm{p}(r_\mathrm{p}+r_\mathrm{a})}} = \sqrt{\frac{12\varkappa M_\mathrm{Z}}{7 r_A}} = 9{,}9\ \mathrm{km}/s\,, \qquad v_\mathrm{a} = \frac{1}{6} v_\mathrm{p} = 1{,}65\ \mathrm{km}/s\,.$$

Na počátku musí těleso zvýšit rychlost o 2,3 km/s, při přistávání musí těleso opět zvýšit rychlost, tentokrát o 1,45 km/s. **4 body**

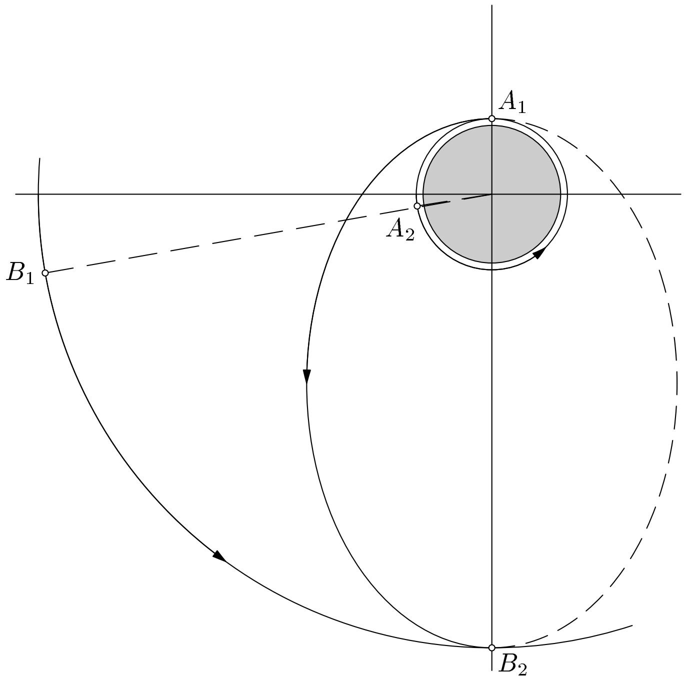
c) Doba letu tělesa je rovna polovině periody na Hohmannově trajektorii, kterou určíme pomocí třetího Keplerova zákona:

$$T = T_\mathrm{A} \sqrt{\left(\frac{a}{r_\mathrm{A}}\right)^3} = 38\,080\ \mathrm{s}\,, \qquad t = \frac{T}{2} = 19\,040\ \mathrm{s} \doteq 3{,}27 T_\mathrm{A} \doteq 0{,}223 T_\mathrm{B}\,.$$

2 body

d) Během letu tělesa se průvodič lodi A otočí o $3{,}27 \times 360^\circ = 3 \times 360^\circ + 98^\circ$. Průvodič lodi B se otočí o $0{,}223 \times 360^\circ = 80^\circ$. Tyto úhly určují konečnou polohu A_2 lodi A a počáteční polohu B_1 lodi B (obr. R1).

2 body



Obr. R1

3. a) Řešením soustavy rovnic

$$V_{\max} - V_{\min} = V_{\mathrm{zdv}}\,, \qquad \frac{V_{\max}}{V_{\min}} = \varepsilon$$

dostaneme:

$$V_{\min} = V_B = V_C = \frac{V_{\mathrm{zdv}}}{\varepsilon - 1} = 37\ \mathrm{cm}^3 = 3{,}7 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m}^3\,,$$

$$V_{\max} = V_A = V_D = \frac{\varepsilon V_{\mathrm{zdv}}}{\varepsilon - 1} = 359\ \mathrm{cm}^3 = 3{,}59 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^3\,.$$

1 bod

b) Vyjdeme ze stavové rovnice:

$$\frac{pV}{T} = nR_{\mathrm{m}}\,, \qquad n = \frac{p_A V_A}{R_{\mathrm{m}} T_A} = 0{,}0144\ \mathrm{mol}\,.$$

1 bod

c) Ze stavové rovnice a Poissonova zákona odvodíme:

$$p_B = p_A \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\varkappa} = p_A \cdot \varepsilon^{\varkappa} = 2{,}41\ \mathrm{MPa}\,,$$

$$T_B = \frac{p_B V_B T_A}{p_A V_A} = T_A \cdot \varepsilon^{\varkappa - 1} = 744\ \mathrm{K} \qquad T_C = 3T_B = 2230\ \mathrm{K}\,.$$

$$\frac{p_B}{p_A} = \frac{p_C}{p_D} \quad \Rightarrow \quad \frac{p_D}{p_A} = \frac{p_C}{p_B} = \frac{T_C}{T_B} = \frac{T_D}{T_A}\,, \qquad p_C = p_B \frac{T_C}{T_B} = 7{,}22\ \mathrm{MPa}\,,$$

$$p_D = p_A \frac{T_C}{T_B} = 300\ \mathrm{kPa}\,, \qquad T_D = T_A \frac{T_C}{T_B} = 900\ \mathrm{K}\,.$$

2 body

p-V diagram je na obr. R2.

d) Děje AB a CD jsou adiabatické:

$$Q_{AB} = 0\,, \qquad W_{AB} = \Delta U_{AB} = \frac{5}{2} nR_{\mathrm{m}} \left(T_B - T_A\right) = 133\ \mathrm{J}\,,$$

$$Q_{CD} = 0\,, \qquad W'_{CD} = -\Delta U_{CD} = \frac{5}{2} nR_{\mathrm{m}} \left(T_C - T_D\right) = 399\ \mathrm{J}\,.$$

Děje BC a DA jsou izochorické:

$$W_{BC} = 0 \qquad \Delta U_{BC} = Q_{BC} = \frac{5}{2} nR_{\mathrm{m}} \left(T_C - T_B\right) = 445\ \mathrm{J}\,,$$

$$W_{DA} = 0 \qquad \Delta Q'_{DA} = -\Delta U_{DA} = \frac{5}{2} nR_{\mathrm{m}} \left(T_D - T_A\right) = 180\ \mathrm{J}\,.$$

2 body

e) Během jednoho cyklu se vykoná celková práce

$$W = W'_{CD} - W_{AB} = Q_{BC} - Q'_{DA} = 266 \text{ J} .$$

Účinnost cyklu je

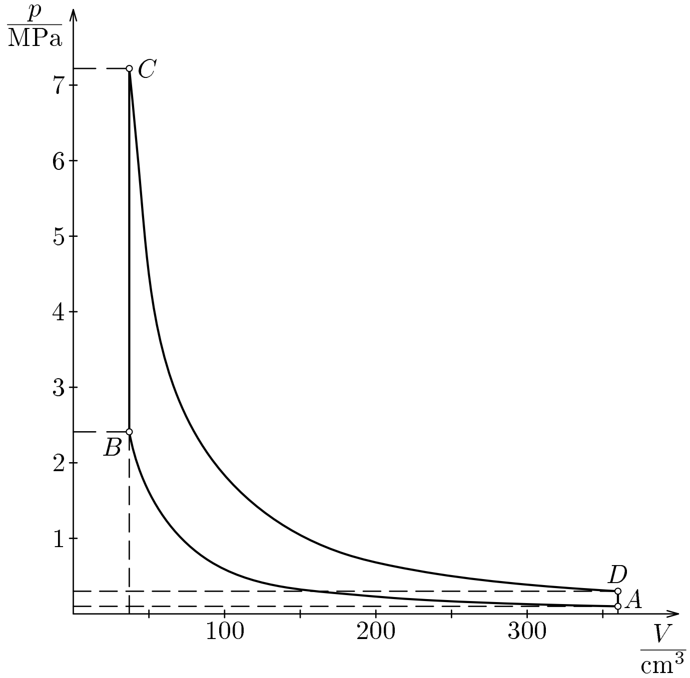
$$\eta = \frac{W}{Q_{BC}} = \frac{Q_{BC} - Q'_{DA}}{Q_{BC}} = 60 \ \% .$$

1 bod

f) Kruhový děj ve válci proběhne během dvou otáček klikového hřídele. Protože motor je čtyřválcový, platí:

$$P = 4 \cdot 0{,}5 f \cdot W = 2 \cdot 50 \text{ s}^{-1} \cdot 266 \text{ J} = 26{,}6 \text{ kW} .$$

1 bod



Obr. R2

2 body

4. a) Vyjdeme ze vztahů

$$T_1^2 = 4\pi^2 \frac{m_1}{k}\,, \quad T_2^2 = 4\pi^2 \frac{m_1 + m_2}{k}\,.$$

Odečtením a úpravou dostaneme:

$$T_2^2 - T_1^2 = 4\pi^2 \frac{m_2}{k}\,, \quad k = \frac{4\pi^2 m_2}{T_2^2 - T_1^2} = 20,2\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}\,.$$

Miska má hmotnost

$$m_1 = \frac{kT_1^2}{4\pi^2} = \frac{m_2 T_1^2}{T_2^2 - T_1^2} = 1,15\ \mathrm{kg}\,.$$

4 body

b) Amplituda kmitů po uvolnění závaží je stejná jako změna rovnovážné polohy vyvolaná tíhou závaží:

$$y_m = \frac{m_2 g}{k} = \frac{g\left(T_2^2 - T_1^2\right)}{4\pi^2} = 0,48\ \mathrm{m}\,.$$

2 body

c) Na závaží působí během pohybu výslednice tíhové síly a reakce misky. Platí:

$$\boldsymbol{F} = m_2 \boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}_G + \boldsymbol{R}\,.$$

Z toho určíme tíhu závaží

$$\boldsymbol{G} = -\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}_G - m_2 \boldsymbol{a}\,.$$

Její velikost je $G = m_2 g + m_2 a = m_2(g + a)$, kde a je **souřadnice zrychlení**, která nabývá střídavě kladných a záporných hodnot. Protože pohyb začíná v horní krajní poloze, platí

$$a = -\omega^2 y = -\omega^2 y_m \cos \omega t\,,$$

$$G = m_2 g - m_2 \omega^2 y_m \cos \omega t = m_2 g \left(1 - \frac{T_2^2 - T_1^2}{T_2^2} \cos \frac{2\pi t}{T_2}\right)\,.$$

Největší a nejmenší velikost tíhy jsou v poměru

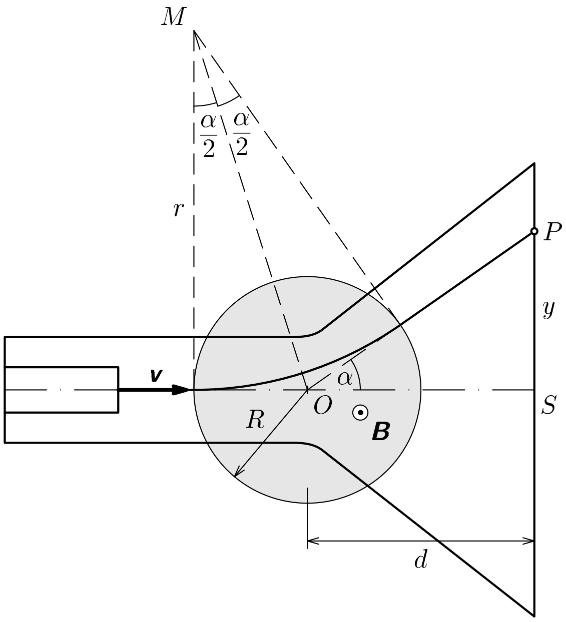
$$\frac{G_{\max}}{G_{\min}} = \frac{1 + \dfrac{T_2^2 - T_1^2}{T_2^2}}{1 - \dfrac{T_2^2 - T_1^2}{T_2^2}} = \frac{2T_2^2 - T_1^2}{T_1^2} = 2,7\,.$$

4 body

5. a) Elektron se v magnetickém poli pohybuje po kruhovém oblouku, jehož středový úhel α je stejný jako odchylka vektoru rychlosti od původního směru (obr. R3). Oblouk je souměrný podle přímky MO a přímka OP je jeho tečnou. Platí

$$\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{R}{r}\,, \qquad y = d\ \mathrm{tg}\,\alpha\ .$$

Trajektorie elektronu je v magnetickém poli zakřivena působením Lorentzovy síly. Pokud vektor $\boldsymbol{B}$ směřuje před nákresnu a elektron se pohybuje vpravo, směřuje výchylka elektronu nahoru. Kdybychom otočili vektor $\boldsymbol{B}$ za nákresnu, elektron by se vychýlil dolů.



Obr. R3

Poloměr oblouku r závisí na velikosti rychlosti elektronu a na velikosti magnetické indukce. Velikost rychlosti elektronu závisí na urychlovacím napětí elektronové trysky. Platí:

$$Ue = \frac{1}{2}mv^2\,, \qquad v = \sqrt{\frac{2Ue}{m}}\,,$$

$$F_d = \frac{mv^2}{r} = Bev\,, \qquad r = \frac{mv}{Be}\ .$$

Po dosazení dostaneme

$$\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{RBe}{mv} = RB\sqrt{\frac{e}{2mU}}\,,$$

$$y = d\ \mathrm{tg}\,\alpha = d\ \mathrm{tg}\left(2\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2d\ \mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\,\frac{\alpha}{2}} = \frac{dRB\sqrt{\frac{2e}{mU}}}{1-\frac{R^2B^2e}{2mU}}\ .$$

4 body

b) Jestliže $y = d$, dostáváme:

$$\frac{y}{d} = \frac{RB\sqrt{\frac{2e}{mU}}}{1-\frac{R^2B^2e}{2mU}} = 1\ ,$$

což vede ke kvadratické rovnici

$$B^2\frac{R^2e}{2mU} + BR\sqrt{\frac{2e}{mU}} - 1 = 0\ ,$$

která má kladné řešení

$$B = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2mU}{e}}\left(\sqrt{2}-1\right)\ .$$

Pro dané hodnoty dostáváme $B = 0,00466$ T.

3 body

c) Pro malé úhly α můžeme psát

$$\mathrm{tg}\,\alpha \doteq 2\,\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\ , \qquad y = 2d\ \mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \doteq dR\sqrt{\frac{2e}{mU}}B = KB\ .$$

Dostáváme přímou úměrnost s konstantou úměrnosti

$$K = dR\sqrt{\frac{2e}{mU}}\ . \quad \text{Pro dané hodnoty} \quad K = 26,7\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{T}^{-1}.$$

3 body

Poznámka. Lze také postupovat takto:

a) $\alpha = 2\,\mathrm{arctg}\left(RB\sqrt{\frac{e}{2mU}}\right)\ , \qquad y = d\,\mathrm{tg}\left[2\,\mathrm{arctg}\left(RB\sqrt{\frac{e}{2mU}}\right)\right]\ .$

b) Jestliže $y = d$, platí $\alpha = 45°$. Pak

$$RB\sqrt{\frac{e}{2mU}} = \mathrm{tg}\,22,5°\ , \qquad B = \frac{\mathrm{tg}\,22,5°}{R}\sqrt{\frac{2mU}{e}} = 0,00466\ \mathrm{T}\ .$$

7. a) Řešení užitím Kirchhoffových zákonů:
Proudy ve větvích označíme podle obr. R4. Platí:

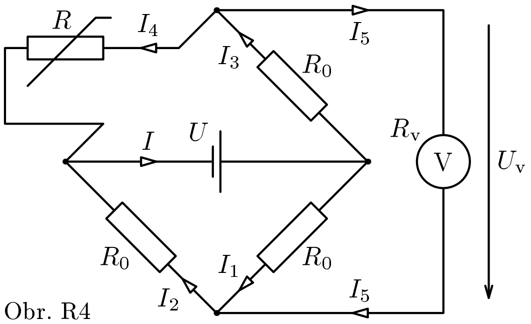
$$I_2 = I_1 + I_5\,,$$

$$I_4 = I_3 - I_5\,,$$

$$R_0 I_1 + R_0 I_2 = U\,,$$

$$R_0 I_3 + R I_4 = U\,,$$

$$R_0 I_1 - R_\mathrm{v} I_5 - R_0 I_3 = 0\,.$$



Obr. R4

3 body

Postupným vyloučením neznámých I_1 až I_4 dojdeme ke vztahům:

$$I_5 = \frac{U(R-R_0)}{R_0^2 + R_0 R_\mathrm{v} + (3R_0 + 2R_\mathrm{v})R} = \frac{U\alpha t}{R_0 + 2R_\mathrm{v} + (3R_0 + 2R_\mathrm{v})(1+\alpha t)}\,,$$

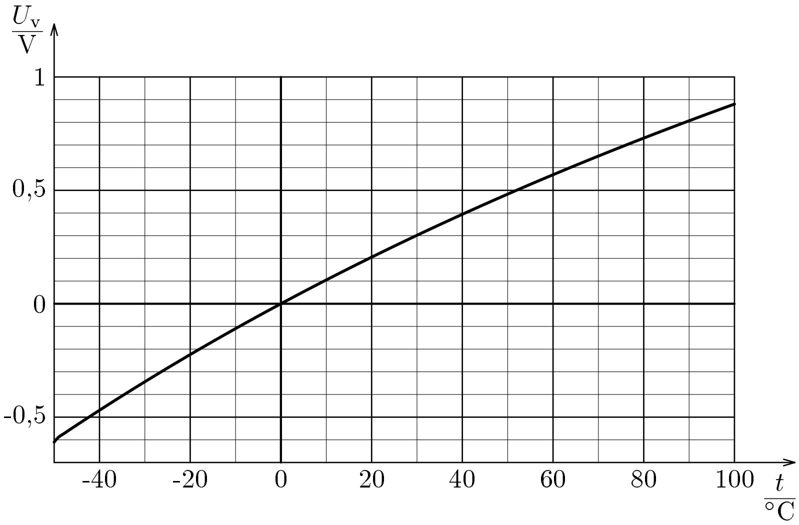
$$U_\mathrm{v} = R_\mathrm{v} I_5 = \frac{U R_\mathrm{v} \alpha t}{4R_0 + 4R_\mathrm{v} + (3R_0 + 2R_\mathrm{v})\alpha t} = \frac{U\alpha t}{\dfrac{4R_0}{R_\mathrm{v}} + 4 + \left(3\dfrac{R_0}{R_\mathrm{v}} + 2\right)\alpha t}\,.$$

Pro dané hodnoty veličin dostaneme vztah mezi číselnými hodnotami $\{t\}$ a $\{U_\mathrm{v}\}$:

$$\{U_\mathrm{v}\} = \frac{0{,}0433\{t\}}{4{,}04 + 8{,}79\cdot 10^{-3}\{t\}}\,.$$

4 body

b)



Obr. R5

3 body