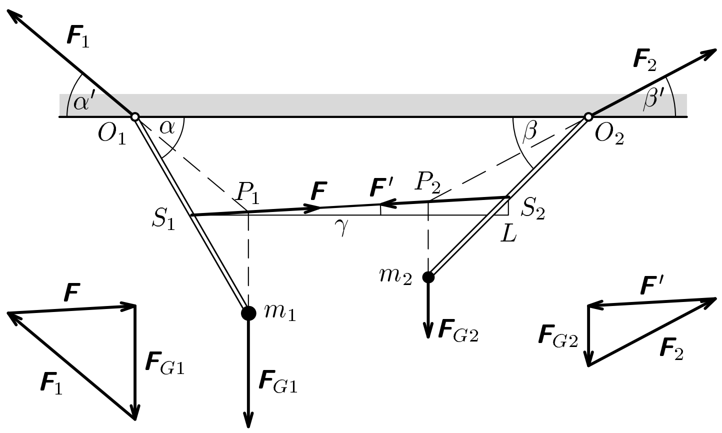
Řešení úloh celostátního kola 44. ročníku fyzikální olympiády.

Autoři úloh: M. Jarešová (1, 2, 3) a B. Vybíral (4). Konečná úprava P. Šedivý.

1. Úlohu je možno řešit **graficky** podle obr. R1. Na první kyvadlo působí tíhová síla $\boldsymbol{F}_{G1}$ tělesa umístěného na konci tyče, síla vlákna $\boldsymbol{F}$ a síla $\boldsymbol{F}_1$ v bodě O_1. Tyto tři síly splňují podmínky rovnováhy a jejich vektorové přímky se protínají v jediném bodě P_1 – průsečíku vlákna a svislice procházející koncem prvního kyvadla. Protože $\boldsymbol{F}_{G1} + \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{0}$, tvoří tyto síly uzavřený obrazec – trojúhelník, ve kterém známe směr a velikost síly $\boldsymbol{F}_{G1}$ a směry sil $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{F}_1$. Trojúhelník je tedy určen podle věty *usu*, můžeme jej ve vhodném měřítku sestrojit, změřit velikosti sil $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{F}_1$ a odchylku síly $\boldsymbol{F}_1$ od vodorovného směru.

Obdobná je situace u druhého kyvadla, kde se vektorové přímky sil $\boldsymbol{F}_{G2}$, $\boldsymbol{F}'$ a $\boldsymbol{F}_2$ protínají v bodě P_2. Tyto síly tvoří trojúhelník, ve kterém známe směr a velikost síly $\boldsymbol{F}'$ a směry sil $\boldsymbol{F}_{G2}$ a $\boldsymbol{F}_2$. Podle zákona akce a reakce je $|\boldsymbol{F}'| = |\boldsymbol{F}|$. Z trojúhelníka můžeme odměřit velikosti sil $\boldsymbol{F}_{G2}$ a $\boldsymbol{F}_2$ a odchylku síly $\boldsymbol{F}_2$ od vodorovného směru. Hmotnost druhého tělesa je $m_2 = F_{G2}/g$.



Obr. R1

Početní řešení

a) Nejprve určíme odchylku gumového vlákna od vodorovného směru. Z trojúhelníku S_1S_2L dostaneme

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\frac{l}{2}(\sin\alpha - \sin\beta)}{n - \frac{l}{2}(\cos\alpha + \cos\beta)} = \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\frac{2n}{l} - (\cos\alpha + \cos\beta)} = 0{,}0569\,, \quad \gamma = 3{,}23^\circ\,.$$

Síla $\boldsymbol{F}$ svírá s tyčí prvního kyvadla úhel $\alpha + \gamma$. Podle momentové věty vzhledem k ose v bodě O_1 platí

$$F \cdot \frac{l}{2} \cdot \sin(\alpha + \gamma) = m_1 g l \cos\alpha \,, \quad F = \frac{2 m_1 g \cos\alpha}{\sin(\alpha + \gamma)} = 32{,}96 \text{ N} \doteq 33{,}0 \text{ N} \,.$$

4 body

b) U druhého kyvadla platí podle momentové věty vzhledem k ose v bodě O_2

$$m_2 g l \cos\beta = F' \cdot \frac{l}{2} \cdot \sin(\beta - \gamma) \,, \qquad F' = F \,,$$

$$m_2 = \frac{F \sin(\beta - \gamma)}{2 g \cos\beta} = \frac{m_1 \cos\alpha \cdot \sin(\beta - \gamma)}{\sin(\alpha + \gamma) \cos\beta} = 1{,}58 \text{ kg} \,.$$

3 body

c) Z podmínek rovnováhy plyne

$$F_{1x} = -F \cos\gamma = -32{,}90 \text{ N} \,, \qquad F_{1y} = F_{G1} - F \sin\gamma = 27{,}6 \text{ N} \,,$$

$$F_1 = \sqrt{F_{1x}^2 + F_{1y}^2} = 42{,}9 \text{ N} \,, \qquad \operatorname{tg}\alpha' = \frac{F_{1y}}{F_{1x}} = 0{,}8380 \,, \quad \alpha' = 40{,}0^\circ \,.$$

$$F_{2x} = F \cos\gamma = 32{,}90 \text{ N} \,, \qquad F_{2y} = F_{G2} + F \sin\gamma = 17{,}4 \text{ N} \,,$$

$$F_2 = \sqrt{F_{2x}^2 + F_{2y}^2} = 37{,}2 \text{ N} \,, \qquad \operatorname{tg}\beta' = \frac{F_{2y}}{F_{2x}} = 0{,}528 \,, \quad \beta' = 27{,}8^\circ \,.$$

3 body

Plný počet bodů je možno předělit i řešiteli, který provedl pouze grafické řešení s výstižným komentářem a z něj získal měřením výsledky s chybou nepřekračující 2 %.

2. a) Kondenzátor tvořený deskami S a D má kapacitu

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{a} = 44{,}3\ \mathrm{pF}\,.$$

Při napětí U vzniknou na jeho deskách nesouhlasné náboje o velikosti

$$Q = CU = 88{,}5\ \mathrm{nC}\,.$$

4 body

b) Pole mezi deskami kondenzátoru, jehož intenzita je $E = U/a$ vzniká superpozicí polí horní a dolní desky. Samotné pole dolní desky D má v každém místě prostoru intenzitu o velikosti $E_1 = U/(2a)$ a působí na náboj Q horní desky silou o velikosti

$$F = E_1 Q = \frac{U}{2a} CU = \frac{CU^2}{2a} = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2a^2} = 0{,}0443\ \mathrm{N}\,.$$

4 body

c) Na obnovení rovnováhy musíme na misku vah položit závaží o hmotnosti

$$m = \frac{F}{g} = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2a^2 g} = 4{,}51 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg} = 4{,}51\ \mathrm{g}\,.$$

2 body

Poznámky:

1. Intenzitu elektrického pole dolní desky lze také určit užitím *Gaussovy věty*:

$$E_1 \cdot 2S = \frac{Q}{\varepsilon_0}\,, \qquad E_1 = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S} = \frac{CU}{2\varepsilon_0 S} = \frac{U}{2a}\,.$$

2. *Odvození vztahu pro výpočet síly užitím zákona zachování energie*:

Zvedneme-li horní desku z rovnovážné polohy do velmi malé vzdálenosti $\mathrm{d}a$, spotřebuje elektrická síla působící na horní desku práci, která se rovná přírůstku celkové energie zdroje a kondenzátoru.

Kapacita kondenzátoru se změní o $\mathrm{d}C = -\dfrac{\varepsilon_0 S}{a^2}\mathrm{d}a\,.$

Náboj kondenzátoru se změní o $\mathrm{d}Q = U \cdot \mathrm{d}C\,.$

Energie zdroje se změní o $\mathrm{d}E_\mathrm{z} = -U \cdot \mathrm{d}Q = -U^2 \cdot \mathrm{d}C\,.$

Energie kondenzátoru se změní o $\mathrm{d}E_\mathrm{c} = \dfrac{1}{2}U^2 \cdot \mathrm{d}C\,.$

$$\mathrm{d}W = F \cdot \mathrm{d}a = \mathrm{d}E_\mathrm{z} + \mathrm{d}E_\mathrm{c} = -\frac{1}{2}U^2 \cdot \mathrm{d}C\,, \qquad F = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}a} \cdot U^2 = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2a^2}\,.$$

3. a) Aby na stínítku vznikl ostrý obraz zdroje Z, musela by být splněna soustava rovnic

$$a + a' = c = 3f\,, \qquad \frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f}\,.$$

Substitucí $a' = 3f - a$ a úpravou dojdeme ke kvadratické rovnici

$$a^2 - 3fa + 3f^2 = 0\,,$$

která má diskriminant $D = -3f^2 < 0$. Soustava proto nemá reálné řešení.

2 body

b) Paprsky, které na čočce osvětlují plochu o obsahu S_0, osvětlují na stínítku plochu o obsahu S. Z rovnosti světelných toků plyne

$$E_0 S_0 = ES\,, \quad E = E_0 \frac{S_0}{S} = \frac{I}{a^2} \cdot \frac{S_0}{S}\,, \tag{1}$$

kde E_0 je osvětlení v rovině čočky a E v rovině stínítka. Mohou nastat tyto možnosti:

1) $a = f$. Pak platí podle obr. R2a:
$$S = S_0\,, \qquad E = E_0 = \frac{I}{f^2}\,.$$

2) $f < a < 3f$. Pak za stínítkem leží skutečný obraz zdroje Z$'$. Paprsky se za čočkou sbíhají a $S < S_0$ (obr. R2b).

3) $0 < a < f$. Pak vznikne před zdrojem Z zdánlivý obraz zdroje Z$'$. Paprsky se za čočkou rozbíhají a $S > S_0$ (obr. R2c).

V případech 2) a 3) platí

$$\frac{S_0}{S} = \frac{a'^2}{x^2}\,, \quad \text{kde} \quad x = a + a' - c = a + a' - 3f\,,$$

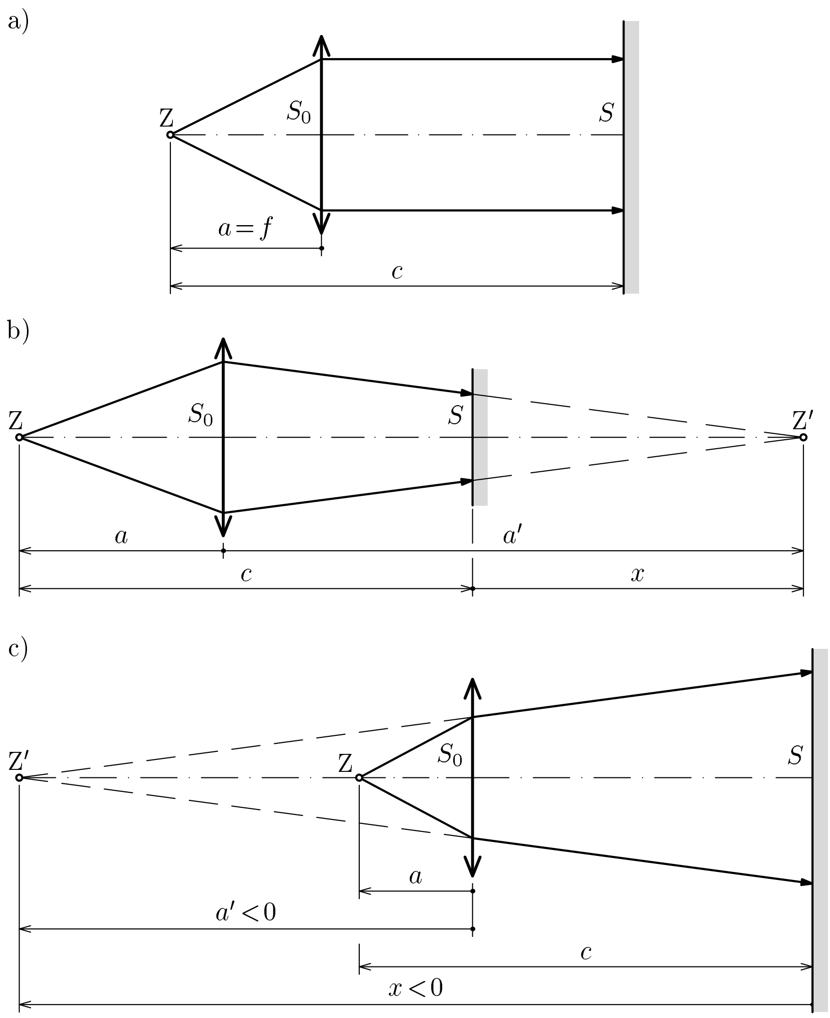
$|x|$ je vzdálenost stínítka od obrazu Z$'$. Užitím zobrazovací rovnice čočky vyjádříme

$$x = a + \frac{af}{a-f} - c = \frac{a^2 - ac + cf}{a - f} = \frac{a^2 - 3af + 3f^2}{a - f}\,.$$

Po dosazeni do (1) dostaneme

$$E = \frac{I}{a^2} \cdot \frac{\dfrac{a^2 f^2}{(a-f)^2}}{\dfrac{(a^2 - 3af + 3f^2)^2}{(a-f)^2}} = \frac{If^2}{(a^2 - 3af + 3f^2)^2} = \frac{If^2}{\left[\left(a - \frac{3}{2}f\right)^2 + \frac{3}{4}f^2\right]^2}\,. \tag{2}$$

4 body



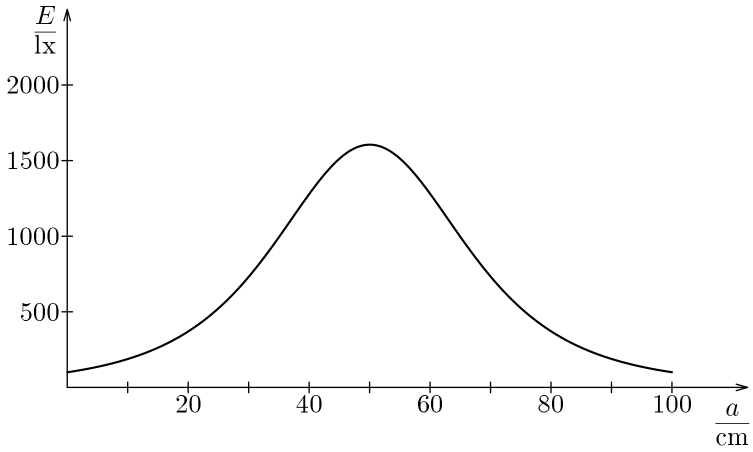
Obr. R2

c) Posouváním čočky můžeme měnit a v intervalu $(0, c) = (0, 3f)$.

α) Pro $a \to 0$ a pro $a \to 3f$ je $E = \dfrac{I}{9f^2} = \dfrac{I}{c^2} = 100$ lx. Osvětlení stínítka je stejné jako před vložením čočky.

β) Zlomek má maximální hodnotu, jestliže $a = \dfrac{3}{2}f = \dfrac{c}{2}$, kdy čočka leží uprostřed mezi zdrojem a stínítkem. Zde je $E = \dfrac{16I}{9f^2} = \dfrac{16I}{c^2}$. To je 16krát větší hodnota než před vložením čočky.

Přesný průběh funkce $E = E(a)$ je znázorněn grafem na obr. R3.



Obr. R3

4 body

4. a) Pohyb automobilu po vyřazení rychlostního stupně se řídí pohybovou rovnicí

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{F_o}{m} = -\frac{CS\varrho v^2}{2m} = -Kv^2\,. \qquad (1)$$

Separací proměnných a integrací dostaneme

$$\int\limits_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}v}{v^2} = -\int\limits_0^t K\,\mathrm{d}t\,, \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = Kt\,, \qquad \frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_0} = Kt_1\,. \qquad (2)$$

Z (1) a (2) odvodíme

$$K = \frac{CS\varrho}{2m} = \frac{v_0 - v_1}{v_0 v_1 t_1}\,, \qquad C = \frac{2m(v_0 - v_1)}{S\varrho v_0 v_1 t_1} = 0{,}93\,.$$

4 body

b) Z (2) odvodíme

$$v = \frac{v_0}{1 + Kv_0 t}\,.$$

Integrací dostaneme

$$s_1 = \int\limits_0^{t_1} v\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{t_1} \frac{v_0\,\mathrm{d}t}{1 + Kv_0 t} = \frac{1}{K}\ln(1 + Kv_0 t_1) = \frac{v_0 v_1 t_1}{v_0 - v_1}\ln\left(1 + \frac{v_0 - v_1}{v_1}\right)$$

$$= \frac{v_0 v_1 t_1}{v_0 - v_1}\ln\left(\frac{v_0}{v_1}\right) = 575\ \mathrm{m}\,.$$

3 body

c) Zvětšíme-li nákladem hmotnost automobilu na $m' = 2m$, bude platit pohybová rovnice $a = -K'v^2$, kde $K' = K/2$. Stejným postupem jako v úkolu a) dojdeme ke vztahu

$$\frac{1}{v'} - \frac{1}{v_0} = K't_1 = \frac{K}{2}t_1 = \frac{v_0 - v_1}{2v_0 v_1}\,.$$

Z toho

$$\frac{1}{v'} = \frac{v_0 - v_1 + 2v_1}{2v_0 v_1} = \frac{v_0 + v_1}{2v_0 v_1}\,, \qquad v' = \frac{2v_0 v_1}{v_0 + v_1} = 18{,}75\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 67{,}5\ \mathrm{km/h}\,.$$

3 body