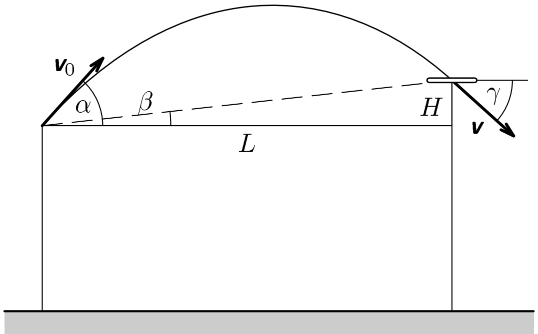
Řešení úloh 1. kola 44. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie A*

Autoři úloh: M. Randa (1), J. Jírů (2), V. Havel (3), P. Šedivý (4, 5), M. Jarešová (6), B. Vybíral a P. Šedivý (7)

1. Označme L a H vodorovnou a svislou vzdálenost středu obroučky od počátečního bodu vrhu, o obvod míče, D průměr obroučky, α elevační úhel, t dobu letu, $\boldsymbol{v}_0$ počáteční rychlost míče, $\boldsymbol{v}$ rychlost míče při průletu obroučkou a γ její odchylku od vodorovné roviny. (obr. R1).



Obr. R1

a) Platí: $L = v_0 t \cos\alpha\,,\qquad H = v_0 t \sin\alpha - \dfrac{1}{2} g t^2 = L \operatorname{tg}\alpha - \dfrac{gL^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}\,.$

$$v_0^2 = \frac{gL^2}{2(L\operatorname{tg}\alpha - H)\cos^2\alpha} = \frac{gL^2}{2(L\sin\alpha\cos\alpha - H\cos^2\alpha)}\,. \qquad (1)$$

Po dosazení $H = L\operatorname{tg}\beta$ a úpravě dostaneme

$$v_0^2 = \frac{gL^2}{2(L\sin\alpha\cos\alpha - L\operatorname{tg}\beta\cos^2\alpha)} = \frac{gL}{\sin 2\alpha - \operatorname{tg}\beta(1+\cos 2\alpha)}\,,$$

$$v_0^2 = \frac{gL\cos\beta}{\sin 2\alpha\cos\beta - \sin\beta - \sin\beta\cos 2\alpha} = \frac{gL\cos\beta}{\sin(2\alpha-\beta) - \sin\beta}\,,$$

Hodnota výrazu je minimální, když

$$\sin(2\alpha-\beta) = 1 \quad 2\alpha - \beta = 90^\circ\,, \quad \Rightarrow \quad \alpha = 45^\circ + \beta/2\,.$$

V takovém případě

$$v_0^2 = \frac{gL\cos\beta}{1-\sin\beta} = \frac{\dfrac{gL^2}{\sqrt{H^2+L^2}}}{1 - \dfrac{H}{\sqrt{H^2+L^2}}} = \frac{gL^2}{\sqrt{H^2+L^2} - H} = g(\sqrt{H^2+L^2} + H)\,.$$

Číselně: $\alpha_{\mathrm{opt}} \doteq 48^\circ$, $v_0 \doteq 7{,}7\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. **6 bodů**

b) Velikost rychlosti míče při průletu obroučkou určíme pomocí zákona zachování energie:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgH + \frac{1}{2}mv^2\,, \qquad v = \sqrt{v_0^2 - 2gH}\,.$$

Pro úhel γ platí: $\cos\gamma = \dfrac{v_x}{v} = \dfrac{v_0\cos\alpha_{\mathrm{opt}}}{\sqrt{v_0^2 - 2gH}}\,.$

Aby se míč dotkl právě obroučky (obr. R2), musela by odchylka φ jeho rychlosti od vodorovné roviny splňovat vztah:

$$\sin\varphi = \frac{2R}{D} = \frac{o}{\pi D}\,.$$

Číselně vychází $\gamma \doteq 42^\circ > \varphi \doteq 33{,}5^\circ$. Míč proletí, aniž by se dotkl obroučky.

4 body

Řešení úlohy a) užitím diferenciálního počtu:

Aby počáteční rychlost měla minimální velikost, musí výraz

$$Q = L\sin\alpha\cos\alpha - H\cos^2\alpha$$

nabývat maximální hodnoty. Toho dosáhneme, když

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\alpha} = L(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2H\cos\alpha\sin\alpha = L\cos 2\alpha + H\sin 2\alpha = 0\,,$$

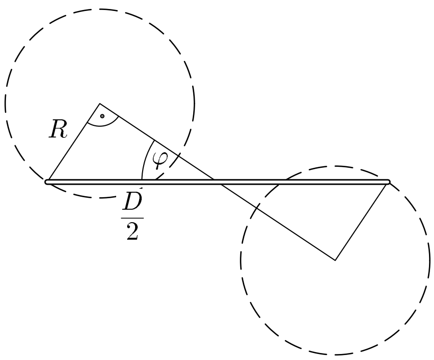
$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{L}{H} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\beta} \quad \Rightarrow \quad 2\alpha = 90^\circ + \beta\,, \quad \alpha = 45^\circ + \frac{\beta}{2} \quad \text{(obr. R3)}\,.$$

Pro $L = -H\operatorname{tg} 2\alpha$ je

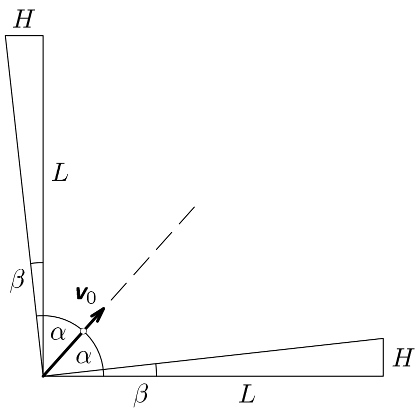
$$\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}\alpha^2} = -2L\sin 2\alpha + 2H\cos 2\alpha = \frac{2H(\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha)}{\cos 2\alpha} = \frac{2H}{\cos 2\alpha} < 0\,,$$

neboť $\cos 2\alpha < 0$. Výraz Q tedy dosahuje pro $\alpha = 45^\circ + \beta/2$ maxima a v_0 je minimální. Další úpravou vztahu (1) dostaneme

$$v_0^2 = \frac{gL}{\sin 2\alpha - \operatorname{tg}\beta(1 + \cos 2\alpha)} = \frac{gL}{\cos\beta - \operatorname{tg}\beta(1 - \sin\beta)} = \frac{gL\cos\beta}{1 - \sin\beta}\,.$$



Obr. R2



Obr. R3

2. a) Označme m hmotnost soupravy. Ze zákona zachování mechanické energie

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mg\frac{l}{2}\sin\alpha$$

plyne

$$l = \frac{v_0^2}{g\sin\alpha} = 210\ \mathrm{m}\,. \tag{1}$$

1 bod

b) Síla působící na soupravu ve směru nakloněné roviny je rovna pohybové složce tíhové síly části soupravy délky x, která se právě nachází na nakloněné rovině:

$$F = \frac{x}{l}mg\sin\alpha = kx\,, \quad \text{kde} \quad k = \frac{F}{x} = \frac{mg\sin\alpha}{l}\,. \tag{2}$$

Jelikož je síla F přímo úměrná délce x, probíhá pohyb soupravy po nakloněné rovině jako polovina harmonického kmitu s periodou

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,, \tag{3}$$

Z rovnic (1), (2) a (3) pak dostaneme

$$t_0 = \frac{T}{2} = \pi\frac{v_0}{g\sin\alpha} = 110\ \mathrm{s}\,.$$

2 body

c) Pro $v_1 < v_0$ se hmotnost soupravy m a tuhost k zachovávají. Je proto

$$t_1 = t_0 = \pi\frac{v_0}{g\sin\alpha} = 110\ \mathrm{s}\,.$$

1 bod

d) Pro $v_2 > v_0$ označme d vzdálenost dolního konce soupravy od začátku nakloněné roviny v okamžiku zastavení soupravy. Ze zákona zachování mechanické energie a z rovnice (1) plyne

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = mg\left(\frac{l}{2} + d\right)\sin\alpha\,, \qquad d = \frac{v_2^2 - v_0^2}{2g\sin\alpha} = 187\ \mathrm{m}\,. \tag{4}$$

Při najíždění nahoru urazí souprava nejprve dráhu l za dobu t_2' harmonicky, potom dráhu d za dobu t_2'' rovnoměrně zpomaleně do zastavení se zrychlením o velikosti $a = g\sin\alpha$. V předělu označme okamžitou rychlost v_2'. Ze zákona zachování mechanické energie

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_2'^2 + mg\frac{l}{2}\sin\alpha$$

a z rovnice (1) plyne

$$v_2' = \sqrt{v_2^2 - v_0^2} = 8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}\,.$$

Tato rychlost též musí vyhovovat rovnici harmonického pohybu s periodou T

$$v_2' = v_2 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t_2'\right)\,.$$

Z posledních dvou rovnic a z rovnice (1) plyne

$$t_2' = \frac{T}{2\pi} \arccos \frac{\sqrt{v_2^2 - v_0^2}}{v_2} = \frac{v_0}{g \sin\alpha} \arccos \frac{\sqrt{v_2^2 - v_0^2}}{v_2} = 22{,}57\ \mathrm{s}\,.$$

Pro dráhu d uraženou rovnoměrně zpomaleným pohybem do zastavení platí

$$d = \frac{1}{2} g \sin\alpha \cdot t_2''^2\,. \tag{5}$$

Z rovnic (4) a (5) plyne

$$t_2'' = \frac{\sqrt{v_2^2 - v_0^2}}{g \sin\alpha} = 46{,}77\ \mathrm{s}\,.$$

Hledaný čas pak je $t_2 = 2(t_2' + t_2'') = 138{,}7\ \mathrm{s}$

3 body

e) V časovém intervalu $\langle 0, t_2' \rangle$ je harmonický pohyb soupravy popsán rovnicemi

$$v = v_2 \cos(\omega t)\,, \qquad s = \frac{v_2}{\omega} \sin \omega t\,,$$

kde

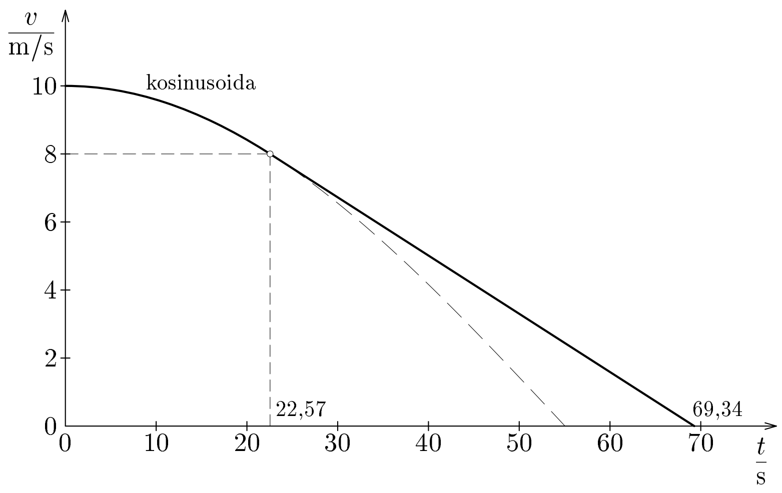
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{g \sin\alpha}{v_0} = 0{,}0285\ \mathrm{s^{-1}}\,.$$

V časovém intervalu $\langle t_2', t_2/2 \rangle$ je rovnoměrně zpomalený pohyb soupravy popsán rovnicemi

$$v = v_2' - g \sin\alpha (t - t_2')\,, \qquad s = l + v_2'(t - t_2') - \frac{1}{2} g \sin\alpha (t - t_2')^2\,.$$

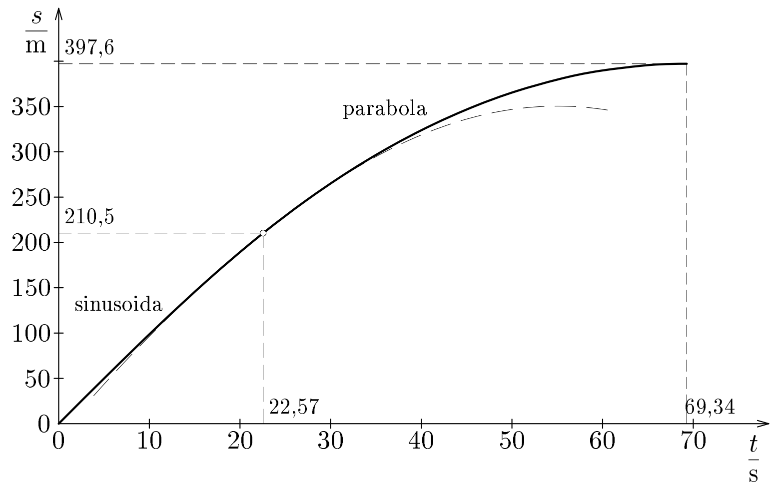
Grafy okamžité rychlosti a dráhy jsou na obr. R4 a R5.

3 body



v
m/s
10
8
6
4
2
0
kosinusoida
22,57
69,34
0
10
20
30
40
50
60
70
t
s

Obr. R4



s
m
397,6
350
300
250
210,5
200
150
100
50
0
parabola
sinusoida
22,57
69,34
0
10
20
30
40
50
60
70
t
s

Obr. R5

3. a) Počáteční tlak plynu p_0 souvisí s počátečním počtem molekul N_0 podle stavové rovnice:

$$\frac{p_0 V}{T} = \frac{N_0}{N_\mathrm{A}} R,$$

kde N_A je Avogadrova konstanta a R molární plynová konstanta.

2 body

Molekuly arsanu se rozkládají podle rovnice

$$2\,\mathrm{AsH_3} \rightarrow 2\mathrm{As} + 3\mathrm{H_2}\,.$$

Z každých dvou molekul arsanu vzniknou tedy tři molekuly vodíku.

2 body

Počet dosud nerozložených molekul arsanu v čase t označíme N. Za malý časový interval $\mathrm{d}t$ se rozloží počet molekul, který je úměrný počtu dosud nerozložených molekul a délce intervalu. Označíme-li konstantu úměrnosti λ, bude

$$\mathrm{d}N = -\lambda N \mathrm{d}t\,, \qquad \frac{\mathrm{d}N}{N} = -\lambda \mathrm{d}t\,.$$

Znaménko minus vyjadřuje, že se počet molekul zmenšuje. Integrací dostaneme

$$\ln N = -\lambda t + C\,.$$

V čase $t = 0$ však byl počet molekul arsanu N_0, takže $C = \ln N_0$. Proto

$$\ln N = -\lambda t + \ln N_0\,, \quad \ln\frac{N}{N_0} = -\lambda t\,, \quad N = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}\,.$$

V čase t bude celkový počet molekul v nádobě

$$N_\mathrm{c} = N + \frac{3}{2}(N_0 - N) = \frac{N_0}{2}\left(3 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\right)\,.$$

Zbývá ještě určit konstantu λ. Podle zadání platí

$$\frac{N_0}{2} = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda\tau}\,, \quad \mathrm{e}^{-\lambda\tau} = \frac{1}{2}\,, \quad \lambda = \frac{\ln 2}{\tau}\,.$$

Pro tlak plynu ze stavové rovnice odvodíme:

$$p = \frac{N_\mathrm{c} R T}{N_\mathrm{A} V} = \frac{N_0\left(3 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\right) R T}{2 N_\mathrm{A} V} = p_0 \frac{3 - \mathrm{e}^{-\lambda t}}{2} = \frac{p_0}{2}\left[3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{\tau}}\right]\,.$$

4 body

b) Po dlouhé době bude člen $\mathrm{e}^{-\lambda t}$ zanedbatelný a tlak bude mít hodnotu

$$p = \frac{3}{2} p_0\,.$$

2 body

4. a) Impedance samotné reálné cívky je $\boldsymbol{Z} = R + \mathrm{j}\omega L$ a impedance sériového spojení reálné cívky s rezistorem o odporu R_1 je $\boldsymbol{Z}_1 = R + R_1 + \mathrm{j}\omega L$. Platí:

$$Z^2 = R^2 + \omega^2 L^2 = \left(\frac{U}{I}\right)^2 , \qquad Z_1^2 = (R + R_1)^2 + \omega^2 L^2 = \left(\frac{U}{I_1}\right)^2 .$$

Po odečtení obou rovnic a dalších úpravách dostaneme:

$$Z_1^2 - Z^2 = 2RR_1 + R_1^2 ,$$

$$R = \frac{Z_1^2 - Z^2 - R_1^2}{2R_1} = \frac{1}{2R_1}\left[\left(\frac{U}{I_1}\right)^2 - \left(\frac{U}{I}\right)^2 - R_1^2\right] ,$$

$$L = \frac{\sqrt{Z^2 - R^2}}{\omega} = \frac{1}{\omega}\sqrt{\left(\frac{U}{I}\right)^2 - R^2} .$$

Pro dané hodnoty: $R = 113{,}5\ \Omega \doteq 110\ \Omega$, $L = 1{,}96\ \mathrm{H} \doteq 2{,}0\ \mathrm{H}$.

4 body

b) Poměr fázoru napětí na kondenzátoru a fázoru celkového napětí je stejný jako poměr impedance kondenzátoru a celkové impedance:

$$\frac{\boldsymbol{U}_C}{\boldsymbol{U}} = \frac{\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{R + \mathrm{j}\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega CR - \omega^2 LC + 1} ,$$

$$\frac{U_C}{U} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2}} .$$

Amplituda napětí na kondenzátoru je

$$U_{C\mathrm{m}} = \frac{U\sqrt{2}}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2}} .$$

2 body

Extrém nastane, jestliže

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}C}\left[(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2\right] = 2\omega^2(\omega^2 L^2 C - L + R^2 C) = 0 .$$

Z toho:

$$C_\mathrm{k} = \frac{L}{\omega^2 L^2 + R^2} .$$

2 body

Pro $C < C_\mathrm{k}$ je derivace záporná a pro $C > C_\mathrm{k}$ je derivace kladná. Výraz pod odmocnítkem tedy pro $C = C_\mathrm{k}$ dosahuje minima a amplituda napětí na kondenzátoru maxima

$$U_{C\mathrm{mk}} = \frac{U\sqrt{2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2 L^2}{\omega^2 L^2 + R^2}\right)^2 + \frac{\omega^2 R^2 L^2}{(\omega^2 L^2 + R^2)^2}}} =$$

$$= U\sqrt{2} \cdot \frac{R^2 + \omega^2 L^2}{\sqrt{R^4 + \omega^2 R^2 L^2}} = U\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}\,.$$

Pro dané hodnoty: $C_\mathrm{k} = 5{,}0\ \mu\mathrm{F}$, $U_{C\mathrm{mk}} = 78\ \mathrm{V}$.

2 body

Poznámka: Případ vyšetřovaný v úloze b) se liší od *sériové rezonance*, při které platí *Thomsonův vztah* a obvodem prochází maximální proud. V tomto případě

$$C_\mathrm{r} = \frac{1}{\omega^2 L}\,, \quad Z_\mathrm{r} = R\,, \quad U_{C\mathrm{mr}} = \frac{U\sqrt{2}}{R\omega C} = \frac{U\omega L\sqrt{2}}{R}\,,$$

pro dané hodnoty: $C_\mathrm{r} = 5{,}18\ \mu\mathrm{F}$, $U_{C\mathrm{mr}} = 77\ \mathrm{V}$. Pokud řešitel uvede sériovou rezonanci jako řešení úlohy b), hodnotí se řešení úlohy b) nejvýše čtyřmi body.

5. Budeme vycházet z grafického řešení úlohy na obr. R6 a používat znaménkovou konvenci obvyklou ve středoškolských učebnicích fyziky.

a) Paprsek, který přichází rovnoběžně s optickou osou, se nejprve láme na spojce do jejího obrazového ohniska F_1', pak se láme na rozptylce do obrazového ohniska celé soustavy F'. Rozptylka zobrazuje bod F_1' do bodu F'. Platí

$$\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2'}=\frac{1}{d-f_1}+\frac{1}{a_2'}=\frac{1}{f_2}\,, \qquad a_2'=\frac{(d-f_1)f_2}{(d-f_1)-f_2}=\frac{(f_1-d)|f_2|}{|f_2|-(f_1-d)}=3{,}33\ \mathrm{cm}\,.$$

Obrazové ohnisko teleobjektivu leží ve vzdálenosti 3,33 cm za rozptylkou.

Paprsek, který vystupuje z rozptylky rovnoběžně s optickou osou, směřuje před rozptylkou do jejího předmětového ohniska F_2. Spojka tedy zobrazuje předmětové ohnisko teleobjektivu F do předmětového ohniska rozptylky F_2. Platí

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_1'}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{|f_2|+d}=\frac{1}{f_1}\,, \qquad a_1=\frac{a_1'f_1}{a_1'-f_1}=\frac{(|f_2|+d)f_1}{|f_2|+d-f_1}=18\ \mathrm{cm}\,.$$

Předmětové ohnisko teleobjektivu leží ve vzdálenosti 18 cm před spojkou.

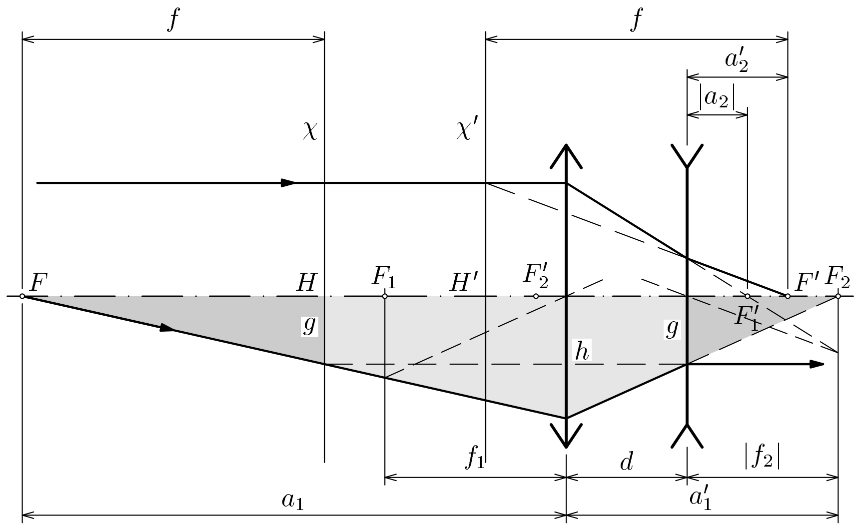
5 bodů

b) Ohniskovou vzdálenost teleobjektivu určíme užitím podobnosti vybarvených trojúhelníků. Platí

$$\frac{g}{h}=\frac{f}{a_1}=\frac{|f_2|}{a_1'}\,, \qquad f=\frac{a_1|f_2|}{a_1'}=\frac{f_1|f_2|}{a_1'-f_1}=\frac{f_1|f_2|}{|f_2|+d-f_1}=10\ \mathrm{cm}\,.$$

Teleobjektiv má ohniskovou vzdálenost 10 cm a jeho hlavní roviny χ a χ' leží ve vzdálenostech 8 cm a 2,67 cm před spojkou.

5 bodů



Obr. R6

7. a) Při volném pádu bez působení elektrické síly je síla odporu vzduchu $\boldsymbol{F}_\mathrm{o}$ v rovnováze s tíhovou silou $\boldsymbol{F}_G$ a aerodynamickou vztlakovou silou $\boldsymbol{F}_\mathrm{v}$. Platí:

$$F_\mathrm{o} = 6\pi r v_0 \eta = F_G - F_\mathrm{v} = \frac{4}{3}\pi r^3(\varrho - \varrho_\mathrm{v})g\,,$$

$$r = 3\sqrt{\frac{v_0\eta}{2(\varrho - \varrho_\mathrm{v})g}} = 1{,}034 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}\,, \qquad m = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho = 4{,}3 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{kg}\,.$$

4 body

b) Nejprve porovnáme velikost elektrické síly a velikost výslednice tíhové a vztlakové síly:

$$F_\mathrm{e} = |Q|E = \frac{3eU}{d} = 3{,}00 \cdot 10^{-14}\ \mathrm{N}\,,$$

$$F_G - F_\mathrm{v} = mg\frac{\varrho - \varrho_\mathrm{v}}{\varrho} = 4{,}16 \cdot 10^{-14}\ \mathrm{N}\,.$$

2 body

1) Je-li náboj kapičky kladný ($Q_1 = +3\mathrm{e}$), působí elektrická síla dolů a rychlost kapičky se po připojení napětí zvětší. Platí

$$F_\mathrm{o} = 6\pi r v_1 \eta = F_G - F_\mathrm{v} + F_\mathrm{e} = 6\pi r v_0 \eta + \frac{UQ_1}{d}\,,$$

$$v_1 - v_0 = \frac{UQ_1}{6\pi d r\eta} = \frac{UQ_1}{9\pi d}\sqrt{\frac{(\varrho - \varrho_\mathrm{v})g}{2v_0\eta^3}} = 0{,}090\ \mathrm{mm{\cdot}s^{-1}}\,, \qquad v_1 = 0{,}215\ \mathrm{mm{\cdot}s^{-1}}\,.$$

2) Je-li náboj kapičky záporný, působí elektrická síla proti síle tíhové. V našem případě ($Q_2 = -3\mathrm{e}$) je $F_\mathrm{e} < F_G - F_\mathrm{v}$, kapička bude i po připojení napětí klesat dolů, ale její rychlost se zmenší:

$$F_\mathrm{o} = 6\pi r v_2 \eta = F_G - F_\mathrm{v} - F_\mathrm{e} = 6\pi r v_0 \eta - \frac{U|Q_2|}{d}\,,$$

$$v_0 - v_2 = \frac{U|Q_2|}{6\pi d r\eta} = \frac{U|Q_2|}{9\pi d}\sqrt{\frac{(\varrho - \varrho_\mathrm{v})g}{2v_0\eta^3}} = 0{,}090\ \mathrm{mm{\cdot}s^{-1}}\,, \quad v_2 = 0{,}035\ \mathrm{mm{\cdot}s^{-1}}\,.$$

4 body