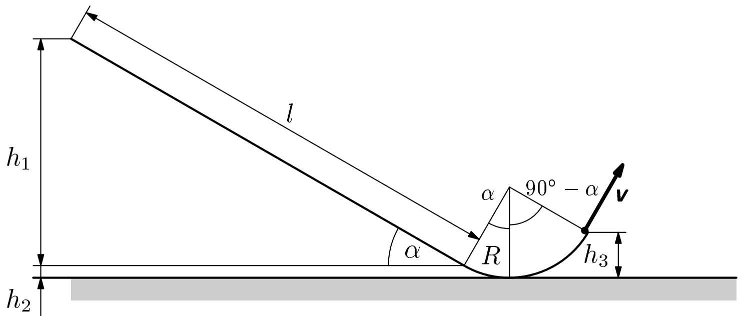
Řešení úloh regionálního kola 43. ročníku fyzikální olympiády.

Kategorie B

Autoři úloh: M. Jarešová (1), M. Randa (2), K. Rauner(3) a B. Vybíral (4).
Konečná úprava: P. Šedivý

1.a) Vyjdeme z obr. R1. Platí:

$$h_1 = l \sin\alpha\,, \quad h_2 = R(1-\cos\alpha)\,, \quad h_3 = R[1-\cos(90^\circ-\alpha)] = R(1-\sin\alpha)\,.$$



Obr. R1

Dle zákona zachování mechanické energie platí:

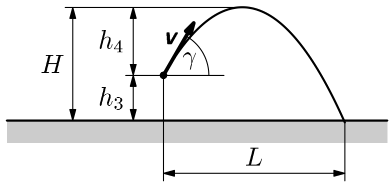
$$mg(h_1 + h_2) = mgh_3 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J_0\omega^2\,, \qquad \omega = \frac{v}{r}\,,$$

$$g[l\sin\alpha + R(1-\cos\alpha)] = gR(1-\sin\alpha) + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{5}v^2\,,$$

$$v = \sqrt{\frac{10}{7}g\,[R(\sin\alpha - \cos\alpha) + l\sin\alpha]} = 3{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

4 body

b) Jedná se o vrh šikmo vzhůru z počáteční výšky h_3 nad vodorovnou rovinou pod úhlem $\gamma = 90^\circ - \alpha$ s počáteční rychlostí $\boldsymbol{v}$ (viz obr. R2).



Obr. R2

$$H = h_3 + h_4, \quad \sin\gamma = \cos\alpha,$$

$$h_4 = \frac{v^2 \sin^2\gamma}{2g},$$

$$h_4 = \frac{5}{7}\cos^2\alpha[R(\sin\alpha - \cos\alpha) + l\sin\alpha]$$

$$H = \frac{5}{7}\cos^2\alpha[R(\sin\alpha - \cos\alpha) + l\sin\alpha] + R(1 - \sin\alpha) = 0{,}66\ \mathrm{m}\,.$$

2 body

c) Doba stoupání: $T_2 = \dfrac{v\sin\gamma}{g} = \dfrac{v\cos\alpha}{g}$
Doba klesání:

$$T_3 = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{10\cos^2\alpha[R(\sin\alpha - \cos\alpha)] + l\sin\alpha}{7g} + \frac{2R(1 - \sin\alpha)}{g}}\,.$$

Celková doba letu: $T = T_2 + T_3 = 0{,}67$ s.

2 body

d) Vodorovná vzdálenost L od místa, kde kulička opustí oblouk:

$$L = vT\cos\gamma = vT\sin\alpha = 1{,}16\ \mathrm{m}\,.$$

2 body

2. a) Teplota ve stavu 1 je stejná jako ve stavu 2:

$$T_1 = T_2 = \frac{p_1 V_1}{n R_\mathrm{m}} = 300\ \mathrm{K}\,.$$

Z Boylova-Marriottova zákona:

$$p_2 = \frac{p_1 V_1}{V_2} = \frac{p_1}{3} = 3{,}3 \cdot 10^4\ \mathrm{Pa}\,.$$

1 bod

b) Při izotermickém ději 2–1 platí $T = T_1 =$ konst. Rovnici přímky, na které leží graf děje 1–2, můžeme napsat ve tvaru $p = aV + b$. Koeficienty a, b nalezneme řešením soustavy rovnic

$$p_1 = aV_1 + b\,, \qquad \frac{1}{3}p_1 = a \cdot 3V_1 + b\,.$$

Dostaneme:

$$a = -\frac{p_1}{3V_1}\,, \qquad b = \frac{4}{3}p_1\,,$$

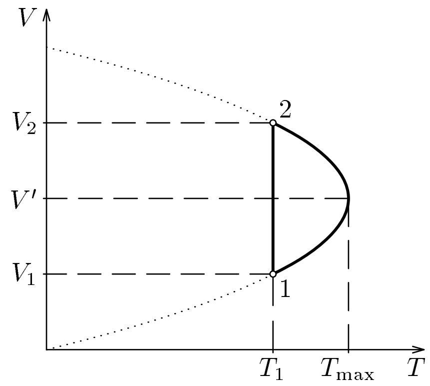
$$p = -\frac{p_1}{3V_1}V + \frac{4}{3}p_1\,.$$

Po dosazení do stavové rovnice máme:

$$-\frac{p_1}{3V_1}V^2 + \frac{4}{3}p_1 V = nR_\mathrm{m}T\,, \qquad T = \frac{4p_1}{3nR_\mathrm{m}}V - \frac{p_1}{3nR_\mathrm{m}V_1}V^2\,.$$

Jde tedy o kvadratickou funkci. Její graf ve V-T diagramu (obr. R3) je parabola.

4 body



Obr. R3

c) Ze symetrie paraboly plyne, že plyn bude mít největší teplotu během děje $1-2$ při objemu

$$V' = \frac{V_1 + V_2}{2} = 2V_1 = 100\,\mathrm{l}\,.$$

Příslušná teplota je

$$T_{\max} = \frac{4p_1}{3nR_\mathrm{m}} 2V_1 - \frac{p_1}{3nR_\mathrm{m}V_1} 4V_1^2 = \frac{4}{3}\frac{p_1V_1}{nR_\mathrm{m}} = \frac{4}{3}T_1 = 400\ \mathrm{K}\,.$$

Příslušný tlak je

$$p' = \frac{nR_\mathrm{m} \cdot \frac{4}{3}T_1}{2V_1} = \frac{2}{3}p_1 = 6{,}7 \cdot 10^4\ \mathrm{Pa}\,.$$

3 body

d) Celková práce plynu během jednoho cyklu je rovna rozdílu práce vykonané při ději $1-2$ a práce spotřebované při ději $2-1$:

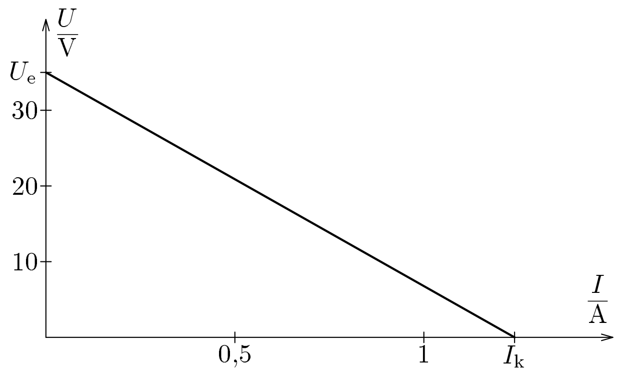
$$W' = \frac{p_1 + \frac{p_1}{3}}{2}(3V_1 - V_1) - nR_\mathrm{m}T_1 \ln\frac{3V_1}{V_1} = p_1V_1\left(\frac{4}{3} - \ln 3\right) = 1{,}17\ \mathrm{kJ}\,.$$

2 body

3.a) Nestabilizovaný zdroj Z má lineární zatěžovací charakteristiku popsanou vztahem

$$U = U_e - R_i I \, .$$

Získáme ji spojením bodu $[0, U_\mathrm{e}]$ na ose napětí a bodu $[I_\mathrm{k}, 0]$ na ose proudu (obr. R4). $I_\mathrm{k} = U_\mathrm{e}/R_\mathrm{i}$ je proud nakrátko, v našem případě $I_\mathrm{k} = 1{,}4$ A.



Obr. R4

2 body

b) V nezatíženém stavu je na Zenerově diodě napětí U_0' a prochází jí proud

$$I_\mathrm{d0} = \frac{U_0' - U_\mathrm{z}}{R_\mathrm{d}} = \frac{U_\mathrm{e} - U_0'}{R_\mathrm{i} + R_1} \, .$$

Úpravou dostaneme

$$U_0' = \frac{U_\mathrm{e} R_\mathrm{d} + U_\mathrm{z}(R_\mathrm{i} + R_1)}{R_\mathrm{d} + R_\mathrm{i} + R_1} = 11{,}2 \text{ V} \, .$$

2 body

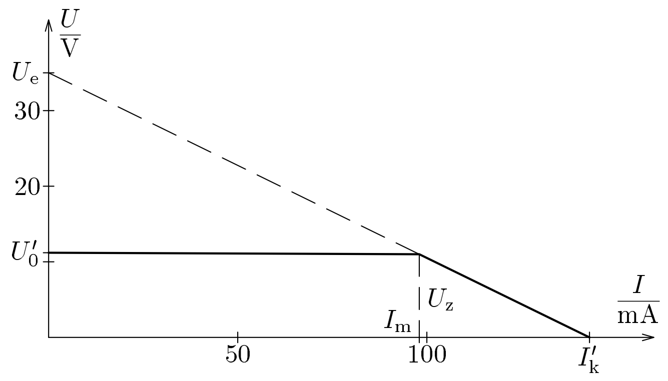
c) Stabilizační účinek Zenerovy diody se přestane uplatňovat, když svorkové napětí klesne právě na Zenerovo napětí U_z a diodou přestane procházet proud. V tomto případě platí

$$I_\mathrm{m} = \frac{U_\mathrm{e} - U_\mathrm{z}}{R_\mathrm{i} + R_1} = 98 \text{ mA} \, .$$

2 body

d) Zatěžovací charakteristika zdroje Z′ má dva lineární úseky (obr. R5). Stabilizovaný úsek leží mezi body $[0, U_0']$ a $[I_m, U_\mathrm{z}]$. Po překročení proudu I_m se Zenerova dioda neuplatňuje a platí $U = U_\mathrm{e} - (R_\mathrm{i} + R_1)\, I$. Tento úsek zatěžovací charakteristiky je omezen body $[I_m, U_\mathrm{z}]$ a $[I_\mathrm{k}', 0]$, kde

$$I_\mathrm{k}' = \frac{U_\mathrm{e}}{R_\mathrm{i} + R_1} = 143 \text{ mA} \, .$$



Obr. R5

2 body

e) Průběh zatěžovací charakteristiky v oblasti stabilizace určíme řešením rovnice

$$\frac{U_\mathrm{e} - U}{R_\mathrm{i} + R_1} = I_\mathrm{d} + I = \frac{U - U_\mathrm{z}}{R_\mathrm{d}} + I\,.$$

Úpravou dojdeme ke vztahu

$$U = \frac{U_\mathrm{e} R_\mathrm{d} + U_\mathrm{z}\,(R_\mathrm{i} + R_1)}{R_\mathrm{d} + R_\mathrm{i} + R_1} - I\,\frac{R_\mathrm{d}(R_\mathrm{i} + R_1)}{R_\mathrm{d} + R_\mathrm{i} + R_1} = U_0' - R_\mathrm{i}' I\,.$$

Vnitřní odpor zdroje Z′ v oblasti stabilizace je tedy

$$R_\mathrm{i}' = \frac{R_\mathrm{d}(R_\mathrm{i} + R_1)}{R_\mathrm{d} + R_\mathrm{i} + R_1} \doteq R_\mathrm{d} = 2{,}5\ \Omega\,.$$

(Ke stejnému výsledku dojdeme i úpravou vztahu $U_0' - U_\mathrm{z} = R_\mathrm{i}' I_\mathrm{m}$.)

2 body

4.a) V mezním stavu je výslednice sil ve směru rychlosti nulová:

$$F = \frac{P}{v} - \frac{1}{2}CS\varrho v^2 = 0\,.$$

Odtud

$$v = \sqrt[3]{\frac{2P}{CS\varrho}}\,, \qquad v_1 = \sqrt[3]{\frac{2P}{C_1 S\varrho}} = 43{,}7\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 157\ \mathrm{km/h}\,,$$

$$v_2 = v_1 \sqrt[3]{\frac{C_1}{C_2}} = 146\ \mathrm{km/h}\,.$$

5 bodů

b) Aby mezní rychlost druhého automobilu byla rovna mezní rychlosti prvního automobilu, musí být

$$\sqrt[3]{\frac{2(P+\Delta P)}{C_2 S\varrho}} = \sqrt[3]{\frac{2P}{C_1 S\varrho}}\,.$$

Odtud

$$\Delta P = P\left(\frac{C_2}{C_1} - 1\right) = 6{,}03\ \mathrm{kW}\,.$$

Výkon se musí zvýšit o 24,1 %.

5 bodů